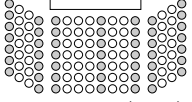


Analiza 3: 2. izpit28. 6. 2019 10⁰⁰

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

 Ime in priimek

1	
2	
3	
4	
Σ	



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Dano naj bo vektorsko polje $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ s predpisom

$$\vec{v}(x, y, z) = (xf(x), \frac{1}{3}y^3 + z, x + y).$$

Določi funkcijo f tako, da bo za poljubno območje $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, orientirano z zunanjo normalo, veljalo $\oint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{S} = J_z$, kjer je J_z vztrajnostni moment območja Ω okoli z -osi.

(Vztrajnostni moment telesa Ω okoli z -osi je dan z $J_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$.)

Rešitev:

Določimo f tako, da bo $\operatorname{div} \vec{v} = x^2 + y^2$. Dobimo pogoj

$$f(x) + xf'(x) = x^2,$$

od koder dobimo $f(x) = \frac{C}{x} + \frac{x^2}{3}$, torej je iskano vektorsko polje oblike

$$\vec{v} = (C + \frac{x^3}{3}, \frac{1}{3}y^3 + z, x + y) \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. naloga (25 točk)

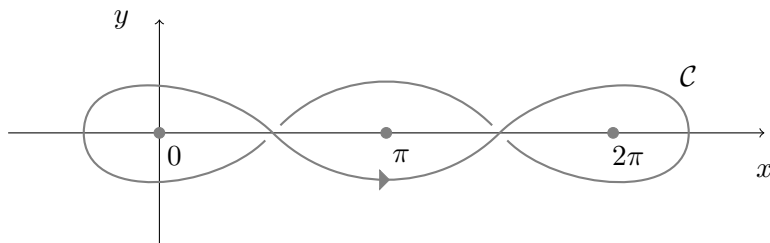
Dana naj bo holomorfná funkcija

$$f(z) = \frac{z}{\sin z},$$

kjer je $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

a) Določi definicijsko območje funkcije f .

b) Izračunaj integral $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz$, kjer je $\mathcal{C}$ krivulja skicirana na spodnji sliki:



Rešitev:

Ničle funkcije $\sin$ so kompleksna števila $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tako, da je definicijsko območje funkcije f enako $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.

Residuum v točki $z = \pi$ je enak $-\pi$, v $z = 2\pi$ je enak 2π (v $z = 0$ je residuum enak 0). Upoštevamo še orientacije in dobimo

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = -6\pi^2 i.$$

3. naloga (25 točk)

Določi splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}.$$

Rešitev:

Splošna rešitev homogene enačbe je $y'' + 2y' + y = 0$ je $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$. Pri nehomogenem delu uporabimo nastavek $y_p = Ax^2e^{-x}$ in dobimo $A = \frac{1}{2}$.

4. naloga (25 točk)

Metrični prostor (M, d) je *omejen*, če obstaja takšno število $D \geq 0$, da je $d(x, y) \leq D$ za vsak $x, y \in M$. Naj bo (M, d) poln in omejen metrični prostor, $\widetilde{M}$ naj bo množica **vseh** preslikav $M \rightarrow M$ in funkcija $\delta : \widetilde{M} \times \widetilde{M} \rightarrow [0, \infty)$ naj bo dana s predpisom

$$\delta(f, g) = \sup_{x \in M} d(f(x), g(x)).$$

a) Pokaži, da je δ metrika na $\widetilde{M}$.

b) Pokaži, da je $(\widetilde{M}, \delta)$ poln metrični prostor.

c) Naj bo $\phi : M \rightarrow M$ skrčitev prostora M . Pokaži, da je preslikava $\phi_* : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$, dana s predpisom

$$\phi_*(f) = \phi \circ f$$

skrčitev prostora $\widetilde{M}$ in določi njeno negibno točko.

Rešitev:

Preslikava δ je nenegativna in simetrična, velja $\delta(f, g) = 0$ natanko tedaj, ko je $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in M$. Trikotniško neenakost utemeljimo na naslednji način:

$$d(f(x), h(x)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x)) \quad x \in M,$$

in če najprej vzamemo supremum na desni strani dobimo

$$d(f(x), h(x)) \leq \delta(f, g) + \delta(g, h) \quad x \in M,$$

nato pa še na levi, kar nam da $\delta(f, h) \leq \delta(f, g) + \delta(g, h)$.

Naj bo $f_n : M \rightarrow M$ Cauchyovo zaporedje v $\widetilde{M}$, kar pomeni, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n, m \geq n_0$ velja

$$\delta(f_n, f_m) < \epsilon.$$

To pa pomeni, da za vsak $x \in M$ velja $d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon$, torej je zaporedje $f_n(x)$ Cauchyovo in s tem konvergentno (M je poln) in lahko definiramo preslikavo $f : M \rightarrow M$ s predpisom $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Naj bo sedaj $\epsilon > 0$, potem obstaja n_0 , da je za vsak $n \geq n_0$

$$d(f_n(x), f_{n_0}(x)) < \frac{\epsilon}{2} \text{ za vsak } x \in M.$$

Potem pa je tudi $d(f(x), f_{n_0}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n(x), f_{n_0}(x)) \leq \frac{\epsilon}{2}$ za vsak $x \in M$.

Sedaj dobimo

$$\delta(f_n, f) \leq \delta(f_n, f_{n_0}) + \delta(f_{n_0}, f) = \sup_{x \in M} d(f_n(x), f_{n_0}(x)) + \sup_{x \in M} d(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

torej zaporedje f_n konvergira k f .

Imamo

$$\delta(\phi_*(f), \phi_*(g)) = \sup_{x \in M} d(\phi(f(x)), \phi(g(x))) \leq \sup_{x \in M} q \cdot d(f(x), g(x)) = q \sup_{x \in M} d(f(x), g(x)) = q \cdot \delta(f, g),$$

torej je ϕ_* skrčitev (z istim faktorjem kot ϕ).

Naj bo x_0 negibna točka preslikave ϕ , potem je konstantna preslikava $c : M \rightarrow M$, $c(x) = x_0$ negibna točka preslikave ϕ_* .