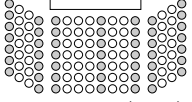


Analiza 3: 3. izpit26. 8. 2019 10⁰⁰

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek

1	
2	
3	
4	
Σ	



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Dan je integral s parametrom

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{1 + (x - t)^2} dt,$$

kjer je $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija.

a) Naj bo funkcija f omejena. Pokaži, da integral konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$, ter da integral konvergira enakomerno na omejenih množicah v $[0, \infty)$.

b) Naj bo funkcija f omejena. Pokaži, da je funkcija F odvedljiva.

Rešitev:

Integrand je omejena funkcija pri spodnji meji 0, konvergira pa tudi v ∞ , saj lahko preoblikujemo (za spodnjo mejo vzamemo npr. 1)

$$\int_1^\infty \frac{f(t)}{1 + (x - t)^2} dt = \int_1^\infty \frac{\frac{t^2 f(t)}{1 + (x - t)^2}}{t^2} dt.$$

Funkcija v števcu je omejena (za poljuben fiksni x), v imenovalcu je t^2 , tako da integral konvergira.

Označimo $S = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)|$ in naj bo $x \in [0, D]$. Potem je

$$\left| \int_M^\infty \frac{f(t)}{1 + (x - t)^2} dt \right| \leq N \int_M^\infty \frac{1}{1 + (x - t)^2} dt = N \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(M - x) \right) \leq N \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(M - D) \right).$$

Ker je $\lim_{M \rightarrow \infty} N \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(M - D) \right) = 0$, integral res enakomerno konvergira na $[0, D]$.

Funkcija F je odvedljiva, ker velja enakost

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{f(t) 2(t - x)}{(1 + (x - t)^2)^2} dt,$$

saj integral $\int_0^\infty \frac{f(t) 2(t - x)}{(1 + (x - t)^2)^2} dt$ zopet konvergira enakomerno na omejenih množicah:

$$\left| \int_M^\infty \frac{f(t) 2(t - x)}{(1 + (x - t)^2)^2} dt \right| \leq \dots \leq N \frac{1}{1 + (x - M)^2} \leq N \frac{1}{1 + (D - M)^2}.$$

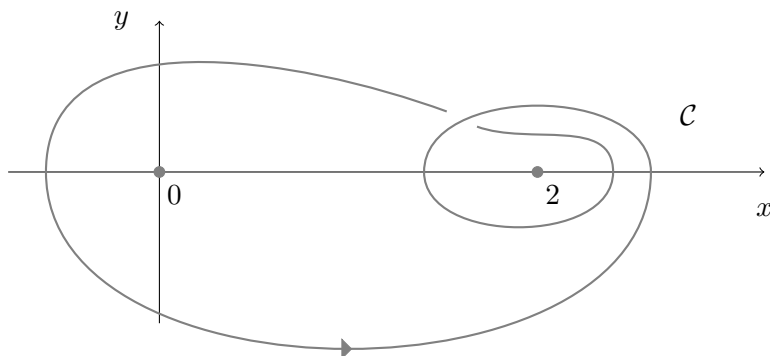
Ker je $\lim_{M \rightarrow \infty} N \frac{1}{1 + (D - M)^2} = 0$, integral res enakomerno konvergira.

2. naloga (25 točk)

Dana je kompleksna funkcija

$$f(z) = \frac{3z - 2}{z^2 - 2z}.$$

Izračunaj $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz$, kjer je $\mathcal{C}$ krivulja skicirana na spodnji sliki:



Rešitev:

Residuum v točki 0 je enak 1, v točki 2 pa 2 in ga krivulja dvakrat obkroži v pozitivni smeri, tako da je

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i(1 + 2 + 2) = 10\pi i.$$

3. naloga (25 točk)

Naj bo $\vec{v}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ ravninsko, enotsko ($|\vec{v}| = 1$) vektorsko polje, kjer sta P, Q zvezno parcialno odvedljivi funkciji. **Ukrivljenost** κ vektorskega polja $\vec{v}$ je dana s predpisom

$$\kappa = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Naj ima enotsko vektorsko polje $\vec{v}$ ukrivljenost κ enako 0. Pokaži, da ne obstaja enostavno sklenjena krivulja z regularno parametrizacijo $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, ki je povsod tangenta na polje $\vec{v}$, t.j. da velja

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} \quad \text{za vsak } t \in [a, b].$$

Rešitev:

Denimo, da takšna krivulja $\mathcal{C}$ obstaja in integrirajmo polje $\vec{v}$ vzdolž te krivulje:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dr = \int_a^b |\dot{\vec{r}}(t)| dt = L,$$

kjer je L dolžina krivulje. Po Greenovi formuli, pa je

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \pm \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

torej takšne krivulje ni.

4. naloga (25 točk)

Naj bo (M, d) , kjer je $M = \{f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ zvezna}\}$ poln metrični prostor z metriko

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

a) Pokaži, da je preslikava $F : M \rightarrow M$, dana s predpisom

$$F(f)(x) = 1 - \frac{1}{4} \int_0^x f(t)^2 dt,$$

dobro definirana, t.j. če je $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, potem je tudi $F(f) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

b) Pokaži, da je preslikava $F : M \rightarrow M$ skrčitev in določi njeno negibno točko.

Rešitev:

Velja $F(f)(0) = 1$ in $F(f)'(x) = -\frac{1}{4}f(x)^2 \geq -\frac{1}{4}$, torej je $\text{im}(F(f)) \subseteq [\frac{3}{4}, 1]$.

Velja

$$|F(g)(x) - F(f)(x)| = \frac{1}{4} \left| \int_0^x (g(t)^2 - f(t)^2) dt \right| \leq \frac{1}{4} \int_0^x |g(t) - f(t)| |g(t) + f(t)| dt \leq$$

$$\frac{1}{4} \int_0^1 |g(t) - f(t)| |g(t) + f(t)| dt \leq \sup_{t \in [0, 1]} |g(t) - f(t)| \frac{1}{4} \int_0^1 2 dt \leq \frac{1}{2} d(f, g).$$

Torej je $d(F(g), F(f)) \leq \frac{1}{2} d(f, g)$, kar pomeni, da je F skrčitev.

Negibna točka $y(x)$ zadošča enačbi

$$y' = -\frac{1}{4}y^2 \quad y(0) = 1,$$

katere rešitev je

$$y(x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{4}}.$$