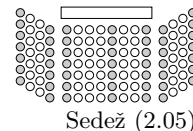


Analiza 3: 2. kolokvij

21. 1. 2019

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Dani naj bosta funkciji

$$u(x, y) = \frac{g(x) + y}{x^2 + y^2} \quad v(x, y) = \frac{x - f(y)}{x^2 + y^2}.$$

a) Določi funkciji f in g tako, da bo funkcija $F(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorfná z lastnostjo, da je $F(1) = 1 + i$.

(Nasvet: Uporabi Cauchy-Riemannove enačbe in v eni od njih loči spremenljivke.)

b) Razvij funkcijo F v Taylorjevo vrsto okoli točke $z_0 = 1$.

c) Pokaži, da je funkcija F definirana povsod razen v eni točki in določi residuum funkcije F v tej točki.

Rešitev:

Iz druge Cauchy-Riemannovih enačbe dobimo $yg(x) = xf(y)$. Zvezo odvajamo po x in dobimo $yg'(x) = f(y)$, oz. $g'(x) = \frac{f(y)}{y}$. Torej je $g''(x) = 0$ in od tod $g'(x) = A$, kar pa pomeni, da je $f(y) = Ay$. Po analognem razmisleku (odvajamo po zgornjo zvezo po y) dobimo $g(x) = \tilde{A}x$. Iz $yg(x) = xf(y)$ pa sedaj sledi $A = \tilde{A}$. Druga Cauchy-Riemannova enačba ne da nobenega pogoja več.

Torej je

$$F(x + iy) = \frac{Ax + y}{x^2 + y^2} + i \frac{x - Ay}{x^2 + y^2}$$

upoštevamo $F(1) = 1 + i$ in dobimo $A = 1$, torej $g(x) = x$ in $f(y) = y$. Vstavimo $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ in $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ in dobimo

$$F(z) = \frac{1+i}{z}.$$

Torej je $\text{Res}_F(0) = 1 + i$, za Taylorjevo vrsto pa zapišemo

$$F(z) = \frac{1+i}{1+(z-1)} = (1+i)(1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots)$$

2. naloga (25 točk)

Dana je kompleksna funkcija $f(z) = \frac{z+1}{z(z^2-4)}$. Krivulja $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ naj bo dana v implicitni obliki z

$$\mathcal{C} = \{x + iy \in \mathbb{C}; x^2 = y^2 + 1, x > 0\}$$

orientirana v smeri naraščajoče koordinate y . Izračunaj

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz.$$

(Nasvet: Odsek krivulje $\mathcal{C}$ dopolni do sklenjene krivulje z delom krožnice s središčem 0 in velikim polmerom R in uporabi izrek o residuih).

Rešitev:

Izberemo $R \rightarrow \infty$ in krivujo dopolnimo s četrtkrožnico radija R . Potem je

$$2\pi i \operatorname{Res}_f(2) = \frac{3\pi i}{4} = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint f(z) dz = - \int_{\mathcal{C}} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} f(z) dz,$$

pri čemer pa je $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} f(z) dz = 0$.

3. naloga (25 točk)

a) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $y'' + 4y' - 5y = xe^x$.

b) Ali obstaja tak $\lambda \in \mathbb{R}$, da ima enačba

$$y'' + 4y' - 5y = \lambda y \quad \text{pri robnih pogojih} \quad y(0) = 0 \text{ in } y(1) = 0$$

neničelno rešitev.

Rešitev:

Rešitev je $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} + \left(\frac{x}{12} - \frac{1}{36}\right) x e^x$.

Za $\lambda = -9$ pa imamo splošno rešitev $y = A e^{-2x} + B x e^{-2x}$ in pri robnih pogojih $y(0) = y(1) = 0$ tu velja $A = B = 0$.

Če je $\lambda > -9$, je splošna rešitev oblike $y = A e^{(-2-\sqrt{9+\lambda})x} + B e^{(-2+\sqrt{9+\lambda})x}$, pri pogojih $y(0) = y(1) = 0$ sta oba $A = B = 0$.

Če je $\lambda < -9$, pa je rešitev oblike $y = A e^{-2t} \cos \sqrt{-(9+\lambda)}x + B e^{-2t} \sin \sqrt{-(9+\lambda)}x$ in iz robnih pogojev dobimo $A = 0$, medtem ko je B lahko različen od 0, če je $\sqrt{-(9+\lambda)} = n\pi$, kjer je $n = 1, 2, 3, \dots$

4. naloga (25 točk)

Naj bo

$$M = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f'(0) = 0 \text{ in } f \text{ je dvakrat zvezno odvedljiva}\}$$

in preslikava $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$d(f, g) = \int_0^1 |f''(x) - g''(x)| dx.$$

a) Preveri, da je d metrika na množici M .

b) Denimo, da zaporedje funkcij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v prostoru (M, d) konvergira k funkciji $f \in (M, d)$. Sklepajte, da je $f'_n(x) - f'(x) = \int_0^x (f''_n(t) - f''(t)) dt$ in od tod, da zaporedje odvodov f'_n konvergira enakomerno proti f' . Nato pokažite še, da zaporedje f_n konvergira enakomerno proti funkciji f .

Rešitev:

Je metrika, saj iz $d(f, g)$ sledi, da je $f''(x) = g''(x)$ za vsak $x \in [0, 1]$ (zveznost drugih odvodov). Potem pa zaradi začetnih pogojev velja, da je $f(x) = g(x)$ za vse $x \in [0, 1]$.

Enakost $f'_n(x) - f'(x) = \int_0^x (f''_n(t) - f''(t)) dt$ nam da

$$|f'_n(x) - f'(x)| \leq \int_0^x |f''_n(t) - f''(t)| dt \leq \int_0^1 |f''_n(t) - f''(t)| dt = d(f_n, f).$$

Torej je $\sup_{x \in [0, 1]} |f'_n(x) - f'(x)| \leq d(f_n, f) \rightarrow 0$, ko $n \rightarrow \infty$, torej f'_n res enakomerno konvergira k f' .

Analogno velja $f_n(x) - f(x) = \int_0^x (f'_n(t) - f'(t)) dt$, kar nam da

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \int_0^x |f'_n(t) - f'(t)| dt \leq \int_0^1 |f'_n(t) - f'(t)| dt.$$

Torej je $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \int_0^1 |f'_n(t) - f'(t)| dt \rightarrow 0$, ko $n \rightarrow \infty$, saj f'_n enakomerno konv. k f' , torej f_n res enakomerno konvergira k f .