

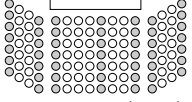
Analiza 3: 1. izpit

31. 1. 2020 10⁰⁰

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek

1	
2	
3	
4	
Σ	



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Dan naj bo integral s parametrom

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{(2a)^x - a^x}{x} dx.$$

- a) Določi vse $a \geq 0$, za katere integral $I(a)$ konvergira.
- b) Izračunaj odvod $I'(a)$.
- c) Ali je $I(a)$ zvezna funkcija na konvergenčnem območju?
- d) Ali $I(a)$ konvergira enakomerno na konvergenčnem območju?

Rešitev:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2a)^x - a^x}{x} = \ln(2)$, tako, da je problem le v ∞ . Tu pa mora biti $a \in [0, \frac{1}{2})$, sicer funkcija v integralu ni več omejena.

Naj bo $[0, c] \subset [0, \frac{1}{2})$. Potem imamo po Weierstrassovem kriteriju

$$\frac{(2a)^x - a^x}{x} = \frac{a^x(2^x - 1)}{x} \leq \frac{c^x(2^x - 1)}{x} \quad a \in [0, c]$$

in $\int_0^\infty \frac{c^x(2^x - 1)}{x} dx$ konvergira, tako da je konv. enakomerna na vsakem $[0, c]$, torej je I zvezna funkcija.

Ne konv. enak. na celem $[0, \frac{1}{2})$. Naj bo M poljubno veliko število, potem:

$$\int_M^\infty \frac{(2a)^x - a^x}{x} dx = \int_M^\infty \frac{a^x(2^x - 1)}{x} dx \geq \frac{1}{2} \int_M^\infty \frac{(2a)^x}{x} dx \geq \frac{1}{2} \int_M^{2M} \frac{(2a)^x}{x} dx \geq \frac{1}{2} M \frac{(2a)^{2M}}{2M}$$

Velja

$$\lim_{a \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2} M \frac{(2a)^{2M}}{2M} = \frac{1}{4}$$

torej se zmeraj najde $a \in [0, \frac{1}{2})$, da je ostanek integrala velik.

$$I'(a) = \int_0^\infty 2(2a)^{x-1} - a^{x-1} dx = \frac{1}{a \ln a} - \frac{2}{2a \ln 2a}.$$

(ta je definiran le še za $a > 0$)

2. naloga (25 točk)

Dano je območje

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$$

in vektorsko polje $\vec{v}(x, y, z) = (3x + yz, 2y + z, z - x^2 + 6xy^3)$. Izračunaj

$$\oiint_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

kjer je rob območja ∂V orientiran z zunanjo normalo.

Rešitev:

Velja $y^2 \leq 2 - x^2 - y^2$ na elipsi $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

Divergenca je 6 in imamo

$$\oiint_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 6 \iiint_V dx \, dy \, dz$$

uvvedemo eliptično cilindrične koordinate

$$x = \sqrt{2}r \cos t \quad y = r \sin t \quad z = z \quad Jac = r\sqrt{2}$$

Velja

$$6 \iiint_V dx \, dy \, dz = 6 \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 dr \int_{r^2 \sin^2 t}^{2-2r^2 \sin^2 t - r^2 \cos^2 t} r\sqrt{2} dz = \dots = 6\pi\sqrt{2}.$$

3. naloga (25 točk)

Dana je kompleksna funkcija

$$f(z) = \frac{z}{\sin\left(z + \frac{1}{z}\right)}.$$

a) Določi definicijsko območje funkcije f .

b) Izračunaj $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz$, kjer je $\mathcal{C}$ pozitivno orientirana krivulja dana z

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}, |z - i| = \tfrac{1}{2}\}.$$

Rešitev:

Funkcija ima singularnosti, kjer je $z + \frac{1}{z} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. To so potem točke

$$\pm i \quad \text{in} \quad \frac{k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2 - 4}}{2} \quad k \in \mathbb{Z},$$

kjer vse zadnje ležijo na realni osi.

Za integral potrebujemo le residuum v $z = i$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i} \frac{z(z - i)}{\sin(z + 1/z)} &= \lim_{z \rightarrow i} z \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)}{\sin(z + 1/z)} = \\ &= i \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)}{\sin(z + 1/z)} = (L'Hop) = i \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{\cos(z + 1/z)(1 - 1/z^2)} = \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Dobimo $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = -\pi$.

4. naloga (25 točk)

Naj bo $(\mathcal{C}([0, 1]), d)$ metričen prostor zvezno odvedljivih funkcij na intervalu $[0, 1]$ z metriko

$$d(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |f'(x) - g'(x)|.$$

a) Pokaži, da je d metrika.

b) Ali je $(\mathcal{C}([0, 1]), d)$ poln metričen prostor?

c) Dana je preslikava $\Phi : (\mathcal{C}([0, 1]), d) \rightarrow (\mathcal{C}([0, 1]), d)$ s predpisom

$$\Phi(f)(x) = x^2 + \frac{1}{4} \int_0^x f(t) - f'(t) dt.$$

Pokaži, da je Φ skrčitev in določi njeno negibno točko.

Rešitev:

Je metrika, prostor je poln, saj če je (f_n) Cauchyovo zaporedje, potem (f_n) konvergira enakomerno na $[0, 1]$, torej zaporedje konvergira k neki zvezni funkciji f . Hkrati pa tudi (f'_n) konvergira enakomerno na $[0, 1]$, kar pomeni da je f odvedljiva (tudi zvezno, ker so f'_n zvezne).

$$d(\Phi(f), \Phi(g)) = \max_{x \in [0, 1]} (|\int_0^x 1/4(f - g) - 1/4(f' - g') dt| + |1/4(f - g) - 1/4(f' - g')|) \leq$$

$$\max_{x \in [0, 1]} (\int_0^x 1/4|(f - g)| + 1/4|f' - g'| dt + 1/4|f - g| + 1/4|f' - g'|) \leq \frac{1}{2}d(f, g).$$

Za negibno točko dobimo

$$5y' - y = 8x \quad y(0) = 0 \Rightarrow y(x) = 8(5e^{\frac{x}{5}} - x - 5).$$