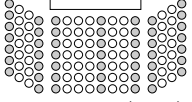


**Analiza 3: 2. izpit**1. 7. 2020 10<sup>00</sup>

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek

|   |  |
|---|--|
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| Σ |  |

Sedež (2.05)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Vpisna številka

**1. naloga**

Za  $a \geq 0$  naj bo dan integral s parametrom

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\arctan(ax^2)}{x^2} dx,$$

pri čemer vemo, da je  $I : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija.

a) Izračunaj odvod  $I'(a)$ , pri čemer si pri izračunu lahko pomagaš s formulo

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Odgovor utemelji!

b) S pomočjo a) izračunaj  $I(a)$  za vse  $a \geq 0$ .

**Rešitev:**

Velja

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+a^2x^4}.$$

To odvajanje je upravičeno, ker  $I'(a)$  po Weierstrassu enakomerno konvergira na  $a \in [M, \infty)$  za vsak  $M > 0$ . Res

$$\frac{1}{1+a^2x^4} \leq \frac{1}{1+M^2x^4} \quad \forall a \in [M, \infty)$$

in  $\int_0^\infty \frac{dx}{1+M^2x^4}$  konvergira.

S pomočjo Beta funkcije dobimo

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+a^2x^4} = (t = a^2x^4 \quad dx = \frac{t^{-\frac{3}{4}}}{4\sqrt{a}} dt) = \frac{1}{4\sqrt{a}} B(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{a}}.$$

Od tod dobimo

$$I(a) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{a} + C$$

ker pa je  $I(a) = 0$  in je  $I$  zvezna, to pomeni, da je  $C = 0$ . Dobimo torej

$$I(a) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{a}.$$

**Opomba:** Zveznost  $I(a)$ :

Uporabimo neenakost  $\arctan(ax^2) \leq ax^2$ . Po Weierstrassovem kriteriju imamo ( $a \in [0, M]$ )

$$\frac{\arctan(ax^2)}{x^2} \leq \varphi(x) = \begin{cases} M & ; \quad x \in [0, \sqrt{\frac{\pi}{2M}}] \\ \frac{\pi}{2x^2} & ; \quad x \in (\sqrt{\frac{\pi}{2M}}, \infty) \end{cases} \quad \forall a \in [0, M]$$

Integral  $\int_0^\infty \varphi(x) dx$  konvergira, tako, da  $I(a)$  konvergira enakomerno na  $[0, M]$ .

## 2. naloga (25 točk)

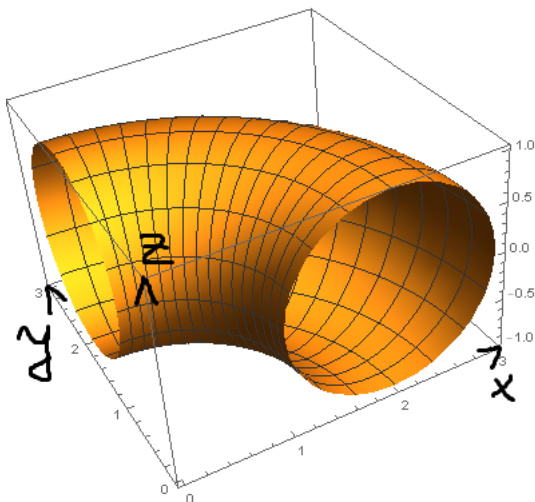
Dano naj bo vektorsko polje  $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  s predpisom

$$\vec{v}(x, y, z) = (x^2, x^2 + z^2, -2xz)$$

in ploskev  $\mathcal{S}$  s parametrizacijo

$$\sigma(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v) \quad u \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad v \in [0, 2\pi],$$

ki je skicirana na spodnji sliki.



Ploskev naj bo orientirana z normalnim vektorskim poljem

$$\vec{n} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{|\sigma_u \times \sigma_v|}.$$

a) Skiciraj orientacijo ploskve na zgornjo sliko.

b) Z uporabo Gaussovega izreka izračunaj

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

**Rešitev:**

Orientacija kaže 'ven' iz ploskve.

Divergenca polja je enaka 0, tako da je pretok skozi ploskev enak negativnemu pretoku skozi začetni in končni disk (ploskev na obeh koncih zapremo z diskom).

Prvi disk parametriziramo

$$\sigma_1(r, v) = (2 + r \cos v, 0, r \sin v) \quad r \in [0, 1] \ v \in [0, 2\pi].$$

Ker  $\sigma_{1r} \times \sigma_{1v} = (0, -r, 0)$  kaže ven je parametrizacija usklajena z orientacijo. Izračunajmo pretok polja skozi ta disk:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (0, -r, 0) \cdot ((2 + r \cos v)^2, (2 + r \cos v)^2 + (r \sin v)^2, -2(2 + r \cos v)(r \sin v)) dr = \\ &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (4 + 4r \cos v + r^2) dr = \frac{26\pi}{3}. \end{aligned}$$

Na drugem disku je normala enaka  $(-1, 0, 0)$ , vektorsko polje pa ima prvo komponento (ki je  $x^2$ ) enako 0, tako da je pretok skozi drugi del enak 0. Končen rezultat je torej

$$\oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{26\pi}{3}.$$

### 3. naloga (25 točk)

Določi splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 2y = x \sin x .$$

**Rešitev:**

Splošna rešitev homogene enačbe je  $y = A \cos(\sqrt{2}x) + B \sin(\sqrt{2}x)$ . Pri nehomogenem delu pa najprej enačbo razširimo v kompleksno obliko

$$y'' + 2y = x e^{ix}$$

in uporabimo nastavek  $y_p = (Ax + B)e^{ix}$ . Vstavimo v enačbo in dobimo

$$A = 1 \quad B = -2i ,$$

sedaj pa vzamemo imaginarni del dobljene rešitve  $(x - 2i)e^{ix}$ , kar nam da

$$y_p = -2 \cos x + x \sin x .$$

Splošna rešitev je torej

$$y = A \cos(\sqrt{2}x) + B \sin(\sqrt{2}x) - 2 \cos x + x \sin x \quad A, B \in \mathbb{R} .$$

#### 4. naloga (25 točk)

Dana naj bo množica funkcij

$$M = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ zvezno odvedljiva}\}$$

in preslikava  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_0^1 |f'(x) - g'(x)| dx.$$

a) Pokaži, da je  $(M, d)$  metrični prostor.

b) Določi vse funkcije  $f \in M$ , za katere je

$$d(f, f') = 0.$$

c) Dana naj bo preslikava

$$F : (M, d) \rightarrow (M, d) \quad F(f)(x) = \frac{f(x) + 1}{x + 3}.$$

Pokaži, da je preslikava  $F$  skrčitev in določi njeno negibno točko.

**Rešitev:**

Samo del, kjer iz  $d(f, g) = 0$  sledi, da je  $f = g$ . To sledi iz zveznosti, saj če bi  $f(x) \neq g(x)$  za nek  $x$ , bi se razlikovali še na nekem intervalu in potem integral ne bi bil 0.

Za **b)** so to ravno funkcije, kjer je

$$f' = f \Leftrightarrow f(x) = Ce^x.$$

Ocenimo

$$\begin{aligned} d(F(f), F(g)) &= \int_0^1 \left| \frac{f(x)+1}{x+3} - \frac{g(x)+1}{x+3} \right| dx + \\ &+ \int_0^1 \left| \frac{(x+3)f'(x) - f(x) - 1}{(x+3)^2} - \frac{(x+3)g'(x) - g(x) - 1}{(x+3)^2} \right| dx = \\ &= \int_0^1 \left| \frac{f(x) - g(x)}{x+3} \right| dx + \int_0^1 \left| \frac{-(f(x) - g(x)) + (x+3)(f'(x) - g'(x))}{(x+3)^2} \right| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{3} \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \frac{1}{9} \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \frac{4}{9} \int_0^1 |f'(x) - g'(x)| dx = \\ &= \frac{4}{9} \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \frac{4}{9} \int_0^1 |f'(x) - g'(x)| dx = \frac{4}{9} d(f, g), \end{aligned}$$

torej je skržitev.

Negibna točka zadošča

$$f(x) = \frac{f(x)+1}{x+3},$$

od koder dobimo

$$f(x) = \frac{1}{x+2}.$$

**Opomba:** Prostor sicer ni poln.

Najprej splošno velja, da če  $f_n \in M$  konvergira k funkciji  $0 \in M$  v metriki  $d$ , potem  $f_n(0)$  konvergira k 0. Res, naj denimo, da je  $|f_n(0)| > a$  (za nek fiksen  $a > 0$ ) neskončno mnogokrat. Denimo, da velja kar  $f_n(0) > a$  (sicer vzamemo  $-f_n$ ) neskončno mnogokrat. Predpostavljamo, da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 |f_n(x)| dx + \int_0^1 |f'_n(x)| dx \right) = 0.$$

Omejimo se na  $n$  (kjer je  $f_n(0) > a$ ). Prej ali slej (zaradi zgornjega) mora biti  $f_n(x) < \frac{a}{2}$ . Naj se to zgodi pri  $x = \delta_n$ . Potem imamo

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx + \int_0^1 |f'_n(x)| dx \geq \frac{a}{2} \delta_n + \int_0^{\delta_n} |f'_n(x)| dx \quad (*)$$

Imamo še

$$f_n(\delta_n) = f_n(0) + \int_0^{\delta_n} f'_n(x) dx \Rightarrow f_n(\delta_n) - f(0) = \int_0^{\delta_n} f'_n(x) dx$$

kar nam da

$$|f_n(\delta_n) - f(0)| \leq \int_0^{\delta_n} |f'_n(x)| dx.$$

Sedaj lahko (\*) nadaljujemo v

$$\geq \frac{a}{2} \delta_n + |f_n(\delta_n) - f(0)| \geq \frac{a}{2} \delta_n + \frac{a}{2} \geq \frac{a}{2}.$$

To pa je protislovje, torej mora  $f_n(0)$  konvergirati k 0.

Sedaj pa iz

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f'_n(t) dt$$

dobimo

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| \leq |f_n(0)| + \int_0^1 |f'_n(x)| dx \leq |f_n(0)| + d(f_n, 0) \rightarrow 0 \text{ za } n \rightarrow \infty$$

torej  $f_n$  konvergira enakomerno (in s tem tudi po točkah) k funkciji 0.

Zaključimo torej lahko, da če  $f_n \in M$  konvergira (v metriki  $d$ ) k funkciji  $f \in M$ , potem tja konvergira tudi po točkah (oz. limita po točkah je edini kandidat za limitno funkcijo).

Npr., če je

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + (x - \frac{1}{2})^2}$$

potem to zaporedje je Cauchyvevo (v metriki  $d$  (malo dolgo za napisati)). Ali konvergira h kakšni zvezno odvedljivi funkciji?

Po točkah konvergira k  $|x - \frac{1}{2}|$ , ki pa ni zvezno odvedljiva funkcija, torej prostor ni poln.