

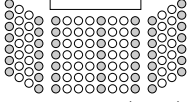
**Analiza 3: 1. kolokvij**2. 12. 2019 16<sup>00</sup>

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

---

 Ime in priimek

|   |  |
|---|--|
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| Σ |  |



Sedež (2.05)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Vpisna številka

**1. naloga (25 točk)**

Dana naj bo krivulja  $\mathcal{C}$  s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = (2t, ct^2, \frac{t^3}{3}) \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Naj bo  $c = 1$ . Izračunaj dolžino dela krivulje  $\mathcal{C}$  med točkama  $(0, 0, 0)$  in  $(6, 9, 9)$ .

b) Določi konstanto  $c \in \mathbb{R}$  tako, da bo tangentna premica skozi vsako točko krivulje  $\mathcal{C}$  sekala krivuljo

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0, 8y = x^2\}.$$

**Rešitev:**

Dolžina krivulje je

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 |\dot{\vec{r}}| dt = \int_0^3 \sqrt{2^2 + (2t)^2 + (t^2)^2} dt = \int_0^3 \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} dt = \\ &= \int_0^3 \sqrt{(t^2 + 2)^2} dt = \int_0^3 (2 + t^2) dt = 15. \end{aligned}$$

Tangentna premica je oblike

$$\tilde{x} = 2t + v2 \quad \tilde{y} = ct^2 + v2ct \quad 0 = \tilde{z} = \frac{t^3}{3} + vt^2.$$

Iz zadnje enačbe dobimo  $v = -\frac{t}{3}$ , kar nam da

$$\tilde{x} = \frac{4t}{3} \quad \tilde{y} = \frac{ct^2}{3}.$$

Ker mora veljati  $\tilde{8y} = \tilde{x}^2$ , dobimo  $c = \frac{2}{3}$ , rezultat je torej

$$\vec{r}(t) = (2t, \frac{2}{3}t^2, \frac{t^3}{3}).$$

## 2. naloga (25 točk)

Izračunaj volumen telesa

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 2x\}.$$

### Rešitev:

Če pogledamo neenakost  $x^2 + y^2 \leq 2x$  vidimo, da v  $(xy)$ -ravnini gre za območje  $D : (x-1)^2 + y^2 \leq 1$ . V cilindričnih koordinatah dobimo

$$\begin{aligned} V &= \iint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^{2x} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r dr \int_{r^2}^{2r\cos\varphi} dz = \\ &= \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

### 3. naloga (25 točk)

Dana naj bo ploskev  $\mathcal{P}$  s parametrizacijo

$$\sigma(\varphi, z) = (e^{-z^2} \cos^2 z \cos \varphi, e^{-z^2} \cos^2 z \sin \varphi, z) \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, \infty)$$

in vektorsko polje

$$\vec{v} = (y^2, yz, -2xy - \frac{z^2}{2}).$$

a) Skiciraj ploskev  $\mathcal{P}$ .

b) Izračunaj  $\iint_{\mathcal{P}} \vec{v} \cdot d\vec{S}$ , kjer je ploskev  $\mathcal{P}$  orientirana z normalnim vektorskim poljem, ki kaže stran od  $z$ -osi.

Nasvet: S pomočjo Gaussovega izreka pokažite, da je integral polja  $\vec{v}$  po ploskvi  $\mathcal{P}$  enak integralu polja  $\vec{v}$  po krogu  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$  in ga nato izračunajte.

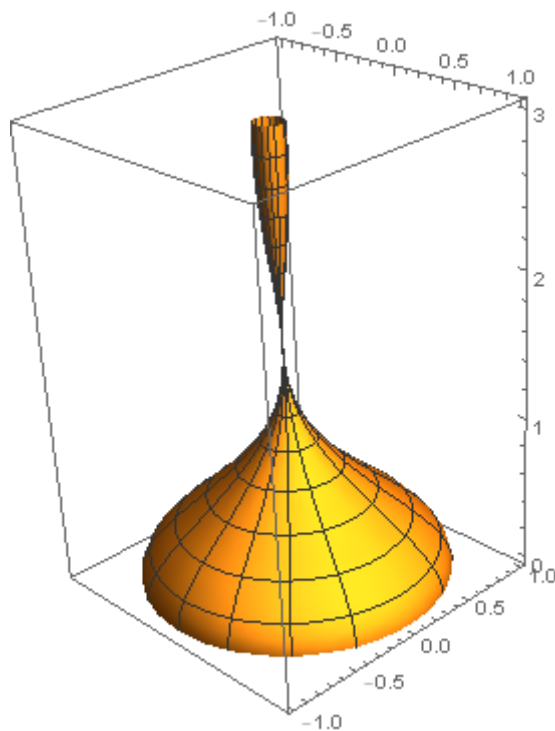
#### Rešitev:

Ker ima  $\vec{v}$  ničelno divergenco, je

$$\iint_{\mathcal{P}} \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \iint_K \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

kjer je  $K$  krog s središčem v  $(0, 0)$  in radijem 1, orientiran z normalnim poljem  $(0, 0, -1)$ . Dobimo torej

$$\begin{aligned} - \iint_K \vec{v} \cdot d\vec{S} &= - \iint_K (y^2, 0, -2xy) \cdot (0, 0, -1) dx dy = \\ \iint_K (-2xy) dx dy &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr (2r^2 \sin \varphi \cos \varphi) = 0. \end{aligned}$$



#### 4. naloga (25 točk)

Za  $a \geq 0$  naj bo dan integral s parametrom

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\ln(1 + ax^4)}{x^3} dx.$$

- a) Določi konvergenčno območje integrala  $I(a)$ .
- b) Pokaži, da integral  $I(a)$  konvergira enakomerno na omejenih podmnožicah konvergenčnega območja.
- c) Izračunaj  $I(a)$ .

##### Rešitev:

$I(0) = 0$ . Če  $a > 0$  imamo potem je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + ax^4)}{x^3} = 0,$$

torej je funkcija omejena pri spodnji meji  $x = 0$ , za konvergenco v  $x \rightarrow \infty$  pa lahko zapišemo

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1 + ax^4)}{x^3} dx = \int_0^\infty \frac{\frac{\ln(1+ax^4)}{x}}{x^2} dx,$$

ker je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + ax^4)}{x} = 0$$

integral konvergira.

Integral  $\int_0^\infty \frac{\ln(1+ax^4)}{x^3} dx$  konvergira enakomerno po Weierstrassovem kriteriju na vsakem intervalu  $[0, M]$ , saj imamo oceno

$$\frac{\ln(1 + ax^4)}{x^3} \leq \frac{\ln(1 + Mx^4)}{x^3} \quad \text{za vsak } a \in [0, M].$$

Velja

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{x}{1 + ax^4} dx = \frac{\pi}{4\sqrt{a}},$$

za  $a > 0$ , saj  $\int_0^\infty \frac{x}{1+ax^4} dx$  konvergira enakomerno po Weierstrassovem kriteriju na vsakem intervalu  $[c, d] \subset (0, \infty)$ , saj imamo oceno

$$\frac{x}{1 + ax^4} \leq \frac{x}{1 + cx^4} \quad \text{za vsak } a \in [c, d].$$

Torej je  $I(a) = \frac{\pi}{2}\sqrt{a} + C$ .

Iz enakomerne konvergence integrala  $I(a)$  sledi, da je funkcija  $I(a)$  zvezna v točki  $a = 0$  in je torej  $C = 0$  in rezultat je

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\sqrt{a}.$$