

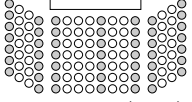
### Analiza 3: 2. kolokvij

20. 1. 2019

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek

|          |  |
|----------|--|
| 1        |  |
| 2        |  |
| 3        |  |
| 4        |  |
| $\Sigma$ |  |



Sedež (2.05)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Vpisna številka

#### 1. naloga (25 točk)

Dana naj bo kompleksna funkcija

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} + \frac{A}{z}.$$

- a) Določi definicijsko območje funkcije  $f$ .
- b) Določi konstanto  $A \in \mathbb{C}$  tako, da bo  $\text{Res}(f, 0) = 0$ .
- c) Za tako določeno konstanto  $A$  zapiši prve tri neničelne člene Taylorjeve vrste funkcije  $f$  razvite okoli točke  $z = 0$  ter določi konvergenčni radij te Taylorjeve vrste.

**Rešitev:**

$D_f = \mathbb{C} - i2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Po formuli za residuum za pol prvega reda dobimo  $\text{Res}(f, 0) = A + 1$ , torej mora veljati  $A = -1$ .

$$\text{Velja } f(z) = \frac{z+1-e^z}{z(e^z-1)} = -\frac{1/2+z/6+z^2/24+\dots}{1+(z/2+z^2/6+\dots)} =$$

$$\begin{aligned} & -(1/2 + z/6 + z^2/24 + \dots)(1 - (z/2 + z^2/6 + \dots) + (z/2 + z^2/6 + \dots)^2 + \dots) = \\ & = -\frac{1}{2} + \frac{1}{12}z - \frac{1}{720}z^3 + \dots \end{aligned}$$

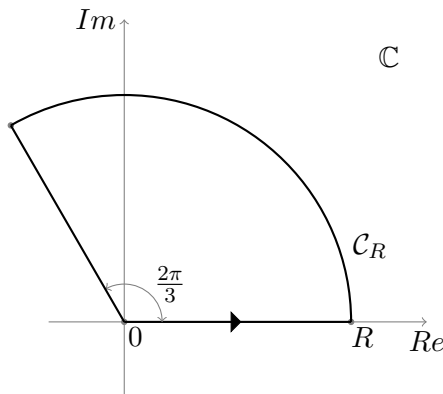
Vrsta ima konvergenčni radij  $2\pi$ , saj se tam nahaja najbližji pol funkcije.

## 2. naloga (25 točk)

Dana naj bo kompleksna funkcija  $f : \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}(z) \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$  s predpisom

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^3 + 1}$$

in pozitivno orientirana krivulja  $\mathcal{C}_R$  ( $R > 1$ ), skicirana na spodnji sliki:



(Krivulja  $\mathcal{C}_R$  je rob območja  $\{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq R \text{ in } \operatorname{Arg}(z) \in [0, \frac{2\pi}{3}]\}$ .)

a) Pokaži, da je residuum funkcije  $f$  v edini singularni točki znotraj območja, ki ga omejuje krivulja  $\mathcal{C}_R$  enak  $-\frac{i}{3}$ .

b) Izračunaj

$$\oint_{\mathcal{C}_R} f(z) dz.$$

c) S pomočjo b) izračunaj realni posplošeni integral

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3 + 1} dx.$$

**Rešitev:**

$z = e^{i\frac{\pi}{3}}$  je edina singularnost, ki leži znotraj območja, ki ga omejuje  $\mathcal{C}_R$ . Residuum znaša

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{3}}} \frac{\sqrt{z}}{z^3 + 1} (z - e^{i\frac{\pi}{3}}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{(e^{i\frac{\pi}{3}} + 1)(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{5\pi}{3}})} = \dots = -\frac{i}{3}$$

Velja

$$\frac{2\pi}{3} = \oint_{\mathcal{C}_R} f(z) dz = \int_0^R \frac{\sqrt{x}}{x^3 + 1} dx + \int_{\text{Krožni lok}} - \int_0^R \frac{-\sqrt{x}}{x^3 + 1} dx$$

Velja

$$\int_{\text{Krožni lok}} = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sqrt{R} e^{i\frac{t}{2}}}{(R e^{it})^3 + 1} R i e^{it} dt,$$

katerega absolutna vrednost je manjša ali enaka

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sqrt{R}}{R^3 - 1} R dt \rightarrow 0 \quad \text{za } R \rightarrow \infty.$$

Torej je  $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3 + 1} dx = \frac{\pi}{3}$ .

### 3. naloga (25 točk)

Naj bo  $n \geq 1$  in definirajmo

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|,$$

kjer je  $x_i$  oznaka za  $i$ -to komponento vektorja  $x \in \mathbb{R}^n$ . Preslikava  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  naj bo dana s predpisom

$$d(x, y) = \|x - y\|_\infty \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

a) Pokaži, da je  $(\mathbb{R}^n, d)$  metrični prostor.

b) Pokaži, da je  $(\mathbb{R}^n, d)$  poln.

c) Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  konstantna realna  $n \times n$  matrika s samimi pozitivnimi elementi, z lastnostjo, da je vsota elementov v vsaki vrstici strogo manjša od 1. Naj bo  $b \in \mathbb{R}^n$  poljuben. Pokaži, da je preslikava

$$F : (\mathbb{R}^n, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d) \quad F(x) = Ax + b$$

skrčitev.

d) Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  konstantna realna  $n \times n$  matrika kot v c). Pokaži, da je matrika  $\text{Id} - A$  obrnljiva.

#### Rešitev:

Naj bodo  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ , potem za vsako komponento posebj velja trikotniška neenakost:

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|,$$

sedaj pa najprej vzamemo  $\max_{i=1,\dots,n}$  na desni in nato na levi in dobimo  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Če je zaporedje Cauchyovo, potem je tako v vsaki komponenti.  $\mathbb{R}$  je poln, tako, da vsaka komponenta zaporedja konvergira. Vektor, katerega komponente so limite komponent pa je limita danega zaporedja v  $d$  metriki: Označimo  $\tilde{x}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n$ , potem pa za dani  $\epsilon > 0$  vzamemo  $n_0$  tako, da je za vsak  $i$   $|\tilde{x}_i - x_i^n| < \epsilon$  za vsak  $n \geq n_0$ . Potem pa je tudi

$$\max_{i=1,\dots,n} |\tilde{x}_i - x_i^n| < \epsilon \quad \text{oz.} \quad d(x, \tilde{x}) < \epsilon.$$

$$d(F(x), F(y)) = \|A(x - y)\|_\infty \leq c d(x, y)$$

kjer je  $c = \max(c_1, \dots, c_n) < 1$ , kjer je  $c_i$  vsota  $i$ -te vrstice matrike  $A$  (ki je po predp. manj od 1).

Ker je preslikava  $F$  skrčitev ima natanko eno negibno točko  $x$  za poljuben  $b$ :

$$x = Ax + b \Rightarrow (\text{Id} - A)x = b$$

ima natanko eno rešitev. Če  $(\text{Id} - A)$  ne bi bila obrnljiva, ne bi bila surjektivna, in bi obstajal  $b \notin \text{im}(\text{Id} - A)$  za katerega potem rešitev sistema  $(\text{Id} - A)x = b$  ne bi obstajala.

#### 4. naloga (25 točk)

Določi vse funkcije  $y(x)$ , za katere v vsaki točki  $x \in \mathbb{R}$  velja, da je določeni integral  $\int_0^x y(t) dt$  enak vsoti količin  $3y(x)$ ,  $4y'(x)$  in  $\cos x$ .

**Rešitev:**

$$\int_0^x y(t) dt = \cos x + 3y + 4y' \Rightarrow 4y'' + 3y' - y = \sin x.$$

Splošna rešitev homogene enačbe je

$$y = Ae^{-x} + Be^{\frac{x}{4}},$$

za partikularno pa z nastavkom  $y_p = Ce^{ix}$  in izbiro imaginarnega dela le tega

$$y_p = \frac{1}{34}(-3 \cos x - 5 \sin x).$$

Velja

$$0 = 1 + 3y(0) + 4y'(0),$$

od koder dobimo pogoj

$$A = 4B + \frac{5}{34},$$

tako da so vse rešitve oblike

$$y = (4B + \frac{5}{34})e^{-x} + Be^{\frac{x}{4}} + \frac{1}{34}(-3 \cos x - 5 \sin x) \quad B \in \mathbb{R}.$$