

Uvod v diferencialno geometrijo: 1. izpit

31. 1. 2020 12⁰⁰ – 14⁰⁰ 2.05

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

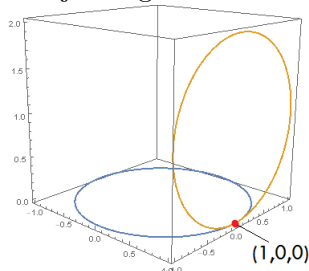
Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Pokončen krog radija 1 se kotali po vodoravnem krogu radija 1.

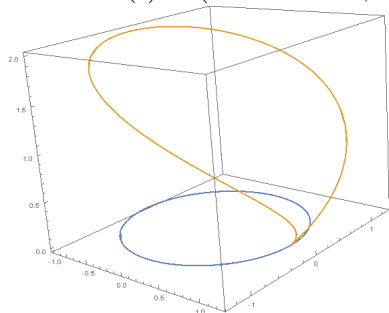
a) Parametriziraj krivuljo $\mathcal{C}$, ki jo opiše točka $(1, 0, 0)$ s pokončnega kroga, če se v začetnem položaju kroga dotikata v točki $(1, 0, 0)$.



b) Poišči ploskev oblike $x = f(z)$ na kateri leži krivulja $\mathcal{C}$.

Rešitev:

Dobimo $\vec{r}(t) = (\cos t + \sin^2 t, \sin t - \sin t \cos t, 1 - \cos t)$.



Ker je

$$x = \cos t + \sin^2 t \quad z = 1 - \cos t \Rightarrow \cos t = 1 - z$$

in dobimo

$$x = 1 + z - z^2.$$

2. naloga (25 točk)

Dan naj bo valj $\mathcal{P}$ s parametrizacijo

$$\sigma(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z) \quad \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, \infty).$$

Dana naj bo funkcija $T(z)$ in parametrizacija ρ ploskve $\mathcal{S}$ oblike

$$\rho(\varphi, z) = (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, g(z)) \quad \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, \infty),$$

za katero velja

$$T(z)^2 \mathbf{I}_\sigma^{FF} = \mathbf{I}_\rho^{FF}.$$

a) Naj bo $T(z) = z^2$. Določi parametrizacijo ρ . Ali je definirana za vse $z \in [0, \infty)$?

b) Določi kakšen primer funkcije $T(z)$ tako, da bo ploskev $\mathcal{S}$ del stožca

$$\nabla = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 = x^2 + y^2\}.$$

Rešitev:

Velja

$$\mathbf{I}_\rho^{FF} = \begin{bmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & f'^2 + g'^2 \end{bmatrix}$$

od koder dobimo $f(z) = T(z)$ in $g'(z) = \sqrt{T^2 - T'^2}$, kar nam v primeru $T(z) = z^2$ da rešitev

$$\rho(\varphi, z) = (z^2 \cos \varphi, z^2 \sin \varphi, \frac{1}{3} \sqrt{z^2 - 4}^3),$$

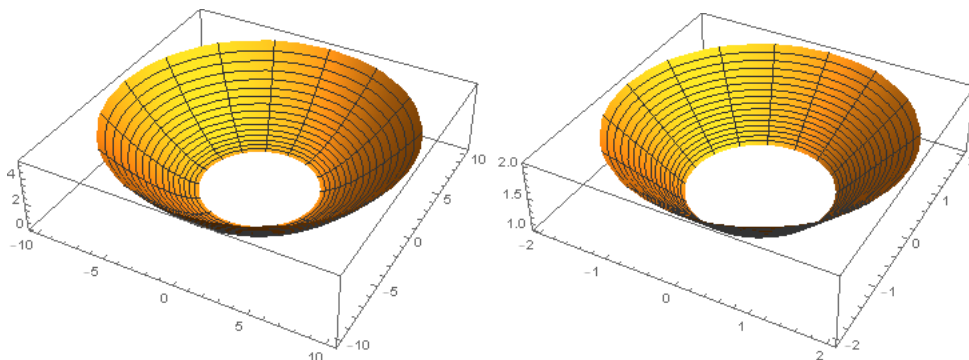
kar je definirano za $z \geq 2$. Za $z < 2$ rešitev $\mathcal{S}$ ni več rotacijsko simetrična (če predpostavljamo, da rešitev sploh obstaja).

Veljati mora $f(z) = g(z)$, od koder dobimo pogoj

$$f(z) = T(z) \quad g'(z) = \sqrt{T^2 - T'^2} \Rightarrow T' = \sqrt{T^2 - T'^2} \Rightarrow 2T'^2 = T^2$$

oziroma

$$\sqrt{2}T' = T \quad \text{kar nam da rešitev} \quad T(z) = e^{\frac{z}{\sqrt{2}}}.$$



3. naloga (25 točk)

Naj ima ploskev $\mathcal{P}$ parametrizacijo $\sigma(\varphi, r)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, \infty)$, da je prva fundamentalna forma oblike

$$I_{\sigma}^{FF}(\varphi, r) = \begin{bmatrix} E(\varphi, r) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Pokaži, da so naravno parametrizirane poti oblike

$$\gamma(t) = \sigma(\varphi_0, r(t)) \quad \varphi_0 = \text{konst.}$$

geodetke na ploskvi $\mathcal{P}$.

b) Denimo, da je naravno parametrizirana pot $\gamma(t) = \sigma(\varphi(t), r_0)$ ($r_0 = \text{konst.}$) geodetka na ploskvi $\mathcal{P}$ za vsak r_0 . Pokaži, da je potem funkcija E odvisna le od spremenljivke φ .

c) Denimo, da je E odvisna le od spremenljivke r , t.j. $E = E(r)$. Določi vse funkcije $E(r)$, da ima pripadajoča ploskev Gaussovo ukrivljenost enako 0.

Nasvet: Za ploskev s parametrizacijo $\sigma(u, v)$ in prvo fundamentalno formo oblike

$$I_{\sigma}^{FF}(u, v) = \begin{bmatrix} E(u, v) & 0 \\ 0 & G(u, v) \end{bmatrix},$$

je Gaussova ukrivljenost dana z

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right).$$

Rešitev:

Vstavimo v dve dif.enačbi za geodetke; prva je kar $0 = 0$, druga pa $\ddot{r} = \ddot{\varphi}$, torej so geodetke. Iz ene od enačb za geodetke dobimo pogoj $\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0$, kar pomeni $E = E(\varphi)$.

Pogoj se reducira na $E' = C\sqrt{E}$, od koder dobimo

$$E(r) = (Cr + D)^2.$$

4. naloga (25 točk)

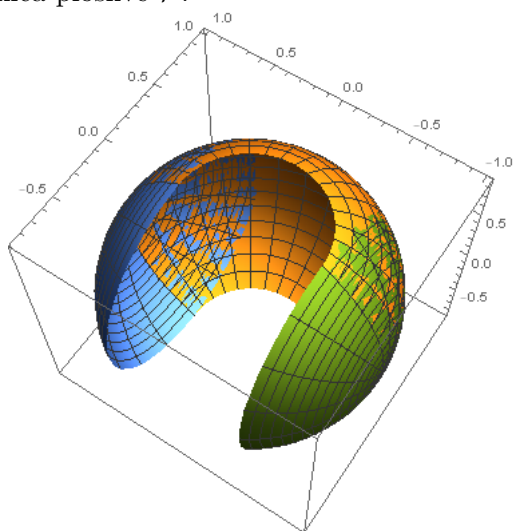
Naj bo $t \geq 0$ in

$$V_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x+t)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$$

neskončen valj radija $\frac{1}{2}$ z osjo, ki gre skozi točko $(-t, 0, 0)$ in je vzporedna z -osi. S pomočjo Gauss-Bonnetovega izreka izračunaj površino ploskve $\mathcal{P}$, kjer je

$$\mathcal{P} = S^2 - \bigcup_{t \in [0, \infty)} V_t.$$

Skica ploskve $\mathcal{P}$:



Rešitev:

Ploskev ima rob iz dveh pol-vzporednikov radija $\frac{1}{2}$ in dveh pol-vzporednikov radija $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sfera naj ima zunanjo orientacijo. Geodetska ukrivljenost bo malo spreminjala predznak (spremljamo $\kappa_g = \gamma'' \cdot (\vec{n} \times \gamma')$) (tako se premikamo po robu), sicer pa najlažje gre iz formule $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$ ($\kappa_n = \pm 1$), torej

$$\kappa_g = -\sqrt{3} \text{ (za vzp. radija } \frac{1}{2})$$

$$\kappa_g = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (za vzp. radija } \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Gre za štirikotnik, vsi koti so π :

$$-\sqrt{3} 2\pi \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} 2\pi \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\pi - 2\pi - \text{Pl}(\mathcal{P})$$

dobimo

$$\text{Pl}(\mathcal{P}) = \pi(1 + \sqrt{3}).$$