

Uvod v diferencialno geometrijo: 1. kolokvij

9. 12. 2019

16⁰⁰ – 18⁰⁰

P.01

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

1. naloga (35 točk)

Dana naj bo krivulja $\mathcal{C}$ s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = (t, \operatorname{ch}(t) - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

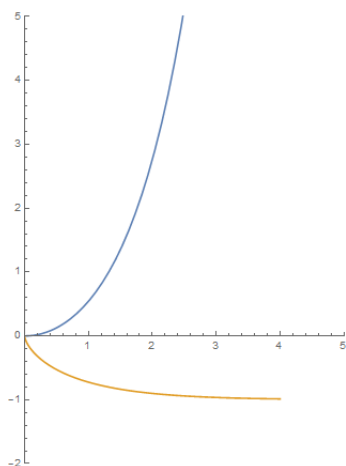
a) Določi parametrizacijo krivulje, ki jo opiše konec vrvi z začetkom v točki $(0, 0) \in \mathcal{C}$, ko se vrv odvíja s krivulje $\mathcal{C}$.

b) Določi parametrizacijo krivulje, ki jo opiše točka $(0, 0) \in \mathcal{C}$, ko se krivulja $\mathcal{C}$ kotili po x -osi.

Rešitev:

Označimo $s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(\tau)| d\tau = \int_0^t \operatorname{ch}(\tau) d\tau = \operatorname{sh}(t)$. Pot konca vrvi je potem dana z

$$\vec{\rho}(t) = (t, \operatorname{ch}(t) - 1) - s(t) \frac{(1, \operatorname{sh}(t))}{\operatorname{ch}(t)} = (t, \operatorname{ch}(t) - 1) - \operatorname{sh}(t) \frac{(1, \operatorname{sh}(t))}{\operatorname{ch}(t)}, \quad t \in [0, \infty).$$

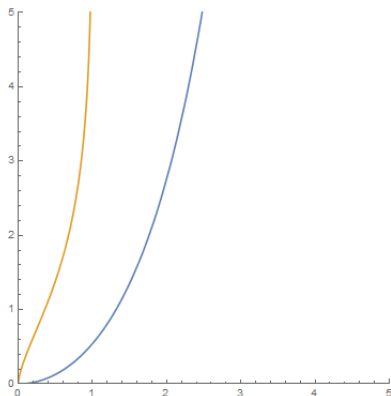


Označimo $\vec{T}(t) = \frac{(1, \operatorname{sh}(t))}{\operatorname{ch}(t)}$ in $\vec{N}(t) = \frac{(-\operatorname{sh}(t), 1)}{\operatorname{ch}(t)}$.

Pot točke $(0, 0)$ je dana z

$$\theta(t) = (s(t), 0) + ((-t, \operatorname{ch}(t) - 1)) \cdot \vec{T}, (-t, \operatorname{ch}(t) - 1)) \cdot \vec{N} =$$

$$\left(\operatorname{sh} t + \frac{\operatorname{sh} t - t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t}, \frac{t \operatorname{sh} t + 1 - \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t} \right) = \left(\frac{\operatorname{sh} t - t}{\operatorname{ch} t}, \frac{t \operatorname{sh} t + 1 - \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$



2. naloga (30 točk)

Ploskev $\mathcal{P}$ naj bo ravnina, parametrizirana z

$$\sigma(\varphi, r) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0) \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, \infty).$$

a) Določi kakšno preslikavo $\phi_1 : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}_1$, ki ohranja površine, kjer je

$$\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}.$$

Nasvet: Za ploskev $\mathcal{S}_1$ vzemi parametrizacijo oblike $\rho(\varphi, r) = (A(r) \cos \varphi, A(r) \sin \varphi, A(r)^2)$.

b) Določi kakšno preslikavo $\phi_2 : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}_2$, za katero velja

$$|d\phi_2 \sigma_\varphi| = \frac{1}{2} |\sigma_\varphi| \quad |d\phi_2 \sigma_r| = |\sigma_r| \quad \angle(d\phi_2 \sigma_\varphi, d\phi_2 \sigma_r) = \angle(\sigma_\varphi, \sigma_r).$$

Katera znana ploskev je $\mathcal{S}_2$?

Nasvet: Za ploskev $\mathcal{S}_2$ vzemi parametrizacijo oblike $\rho(\varphi, r) = (A(r) \cos \varphi, A(r) \sin \varphi, B(r))$ in preveri, da je pogoj, ki mu morata ustrezati prvi fundamentalni formi parametrizacij enak:

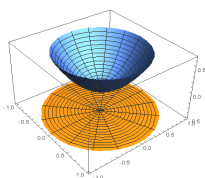
$$E^\rho = \frac{1}{4} E^\sigma \quad F^\rho = \frac{1}{2} F^\sigma \quad G^\rho = G^\sigma.$$

Rešitev: Ploskev $\mathcal{S}_1$ parametriziramo z

$$\rho(\varphi, r) = (A(r) \cos \varphi, A(r) \sin \varphi, A(r)^2).$$

Pogoj za ohranjanje površin je

$$r = A' A \sqrt{1 + 4A^2} \Rightarrow A(r) = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{1 + 6r^2} - 1}{4}}.$$



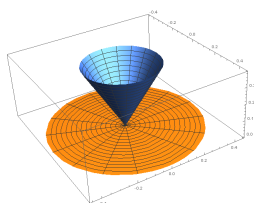
Pogoj za prvi fundamentalni formi je ($\rho_\varphi \cdot \rho_\varphi = \frac{1}{4} \sigma_\varphi \cdot \sigma_\varphi$, $\rho_r \cdot \rho_r = \sigma_r \cdot \sigma_r$ in $\sigma_\varphi \cdot \sigma_r = 2\rho_\varphi \cdot \rho_r$.)

$$A^2 = \frac{r^2}{4} \quad 1 = A'^2 + B'^2,$$

od koder dobimo $A(r) = \frac{r}{2}$ in iz druge enačbe $B(r) = \frac{\sqrt{3}r}{2}$. Dobimo

$$\rho(\varphi, r) = \frac{r}{2} (\cos \varphi, \sin \varphi, \sqrt{3}),$$

kar je ravno stožec.



3. naloga (35 točk)

Ploskev $\mathcal{P}$ naj bo dana s parametrizacijo $\sigma(u, v)$, $(u, v) \in D$. Ploskvi $\mathcal{P}^\times$ pravimo **zasuk** ploskve $\mathcal{P}$, če je dana s parametrizacijo $\rho(u, v)$, za katero velja

$$\rho_u = \sigma_u + \sigma_v \quad \rho_v = -\sigma_u + \sigma_v.$$

a) Izrazi koeficiente prve in druge fundamentalne forme zasuka $\mathcal{P}^\times$ s koeficienti prve in druge fundamentalne forme originalne ploskve $\mathcal{P}$.

b) Naj bo ϕ preslikava

$$\phi = \rho \circ \sigma^{-1} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\times.$$

(predpostavljamo, da $\mathcal{P}^\times$ obstaja).

1. Ali obstaja ploskev $\mathcal{P}$, da je ϕ lokalna izometrija?
2. Ali obstaja ploskev $\mathcal{P}$, da ϕ ohranja površine?
3. Ali obstaja ploskev $\mathcal{P}$, da je ϕ konformna?

c) Določi vse ploskve $\mathcal{P}$ za katere je $\mathcal{P}^\times$ del ravnine.

Rešitev:

Velja

$$E^\rho = E + 2F + G \quad F^\rho = -E + G \quad G^\rho = E - 2F + G.$$

Normali ploskev se ujemata (do predznaka za vsak $(u, v) \in D$), tako da dobimo

$$L^\rho = L + M \quad M^\rho = -L + M = M + N \quad N^\rho = -M + N.$$

1. Pogoji za izometričnost so $E = E + 2F + G$, $F = G - E$ in $G = G - 2F + E$. Ta linearni sistem ima edino rešitev $E = F = G = 0$, tako da ne obstaja (regularna) ploskev s to lastnostjo.
2. Determinanta prve fund. forme za $\mathcal{P}^\times$ je enaka

$$4(EG - F^2),$$

tako, da je površina ploskve $\mathcal{P}^\times$ dvakrat večja od površine ploskve $\mathcal{P}$, torej takšne ploskve ni.

3. Pogoji za konformnost so $\lambda^2 E = E + 2F + G$, $\lambda^2 F = G - E$ in $\lambda^2 G = G - 2F + E$. Ta linearni sistem ima netrivialno rešitev, če je determinanta sistema enaka 0. Determinanta je enaka

$$\lambda^6 - 2\lambda^4 + 4\lambda^2 - 8 = 0,$$

z edino realno rešitvijo $\lambda^2 = 2$. To upoštevamo in dobimo, da mora veljati

$$F = 0 \quad E = G.$$

Primer je npr. $\sigma(u, v) = (u, v, 0)$.

Če je $\mathcal{P}^\times$ del ravnine, so vsi koef. druge fund. forme enaki 0, torej mora veljati

$$L + M = 0 \quad -L + M = M + N = 0 \quad -M + N = 0,$$

od koder dobimo, da velja lahko le $L = M = N = 0$, tako da mora biti že $\mathcal{P}$ del ravnine.