

Uvod v diferencialno geometrijo: 2. kolokvij

6. 1. 2020 $16^{00} - 18^{00}$ P.01

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

1. naloga (35 točk)

Ploskev $\mathcal{S}$ je **mrežno parametrizirana**, če obstajata naravno parametrizirani gladki poti $\gamma(s)$ in $\delta(s)$ v $\mathbb{R}^3$, da je regularna parametrizacija ploskve $\mathcal{S}$ oblike

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + \delta(v) \quad (u, v) \in U^{odp.} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

a) Izrazi kvocient $\frac{H}{K}$ s pomočjo normalnih ukrivljenosti krivulj $\sigma(u, \text{konst.})$ in $\sigma(\text{konst.}, v)$ na ploskvi $\mathcal{S}$. Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo orientirana v smeri vektorskega polja $\sigma_u \times \sigma_v$.

b) Naj bo ploskev $\mathcal{S}$ mrežno parametrizirana. Pokaži, da $\mathcal{S}$ ni podmnožica standardne enotske sfere S^2 .

Rešitev:

1. Velja $\sigma_u = \gamma'$, $\sigma_v = \delta'$, prva fundamentalna forma je oblike

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma'\delta' \\ \gamma'\delta' & 1 \end{bmatrix}$$

Normala je $\vec{n} = \frac{\gamma' \times \delta'}{\sqrt{1 - (\gamma'\delta')^2}}$. Nadalje $\sigma_{uu} = \gamma''$, $\sigma_{uv} = 0$ in $\sigma_{vv} = \delta''$. Označimo z κ_n^u normalno ukrivljenost krivulje $\sigma(u, \text{const.})$ in z κ_n^v normalno ukrivljenost krivulje $\sigma(\text{const.}, v)$. Potem velja

$$L = \kappa_n^u \quad M = 0 \quad N = \kappa_n^v.$$

$$\text{Dobimo } \frac{H}{K} = \frac{\kappa_n^u + \kappa_n^v}{2\kappa_n^u \kappa_n^v}.$$

2. Velja $|\gamma + \delta| = 1$, tako da za normalo vzamemo kar $\gamma + \delta$. Odvajanje enakosti $|\gamma + \delta| = 1$ (enkrat po u in drugič po v) nam da najprej

$$\gamma'(\gamma + \delta) = 0 \text{ in } \delta'(\gamma + \delta) = 0$$

in ko odvajamo po u in v še enkrat dobimo

$$\gamma''(\gamma + \delta) + \gamma'\gamma' = 0 \text{ in } \delta''(\gamma + \delta) + \delta'\delta' = 0,$$

kar ravno pomeni, da je $L = -1$ in $N = -1$ ($M = 0$ velja že od prej). Glavni ukrivljenosti sta

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{1 \pm |\gamma'\delta'|}.$$

Na S^2 z zunanjo orientacijo obe morata biti enaki -1 , kar je možno le če je $\gamma'\delta' = 0$. Ampak potem je prva fundamentalna forma kar Id , kar pomeni, da je del sfere, ki ga zajema $\mathcal{S}$, izometričen ravnini, kar pa ne more biti.

2. naloga (35 točk)

Dana naj bo rotacijska ploskev

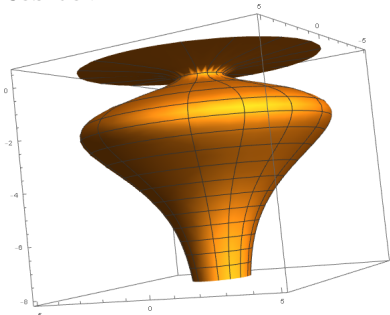
$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + z^2 e^{z+2}\}.$$

a) V odvisnosti od kota ψ (kot med geodetko in meridianom) opiši geodetke na ploskvi $\mathcal{P}$, katerih začetna točka se nahaja na vzporedniku $z = -2$.

b) Ali obstaja kakšna geodetka na ploskvi $\mathcal{P}$, ki se asimptotično približuje vzporedniku $z = -2$?

c) Naj ima vzporednik $z = -1$ lastnost, da prepolovi kot ψ vsake geodetke, ki ga seka. Določi vse kote ψ , da se bo geodetka z začetkom na vzporedniku $z = -2$ asimptotično približevala vzporedniku $z = 0$.

Rešitev:



Za $\psi \in [0, \arcsin \frac{1}{5})$ se geodetka neomejeno širi na oba konca ploskve.

Za $\psi = \arcsin \frac{1}{5}$ se asimptotično približuje vzporedniku $z = 0$, neomejeno pa se širi na spodnji del ploskve.

Za $\psi \in (\arcsin \frac{1}{5}, \frac{\pi}{2})$ se odbija med ustreznima vzporednikoma, za $\psi = \frac{\pi}{2}$, pa gre za vzporednik $z = -2$. Drugih geodetk ni in seveda tudi takšne, ki bi se asimptotično bližala $z = -2$ ni, saj v okolici tega vzporednika ni delov ploskve, ki bi bili oddaljeni od z -osi za več kot 5.

Če označimo z $\Omega = \rho \sin \psi$ količino, ki se vzdolž geodetke ohranja, potem je pogoj, da se asimptotično bliža $z = 0$ ravno, da ponekem prehodu vzporednika $z = -1$ velja, da je $\Omega = 1$.

Geodetka se začne na $z = -2$, tako da če je $\psi > \arcsin \frac{e+1}{5}$ sploh ne doseže vzp. $z = -1$ in se samo v nedogled odbija med ustreznima vzporednikoma. Torej mora biti začetni kot $\psi_0 \in (0, \arcsin \frac{e+1}{5}]$. Po drugi strani, mora direktno pod vzporednikom $z = -1$ veljati $\psi \geq 2 \arcsin \frac{1}{e+1}$, saj se $\psi = 2 \arcsin \frac{1}{e+1}$ po prehodu $z = -1$ razpolovi v $\arcsin \frac{1}{e+1}$ kar da ravno $\Omega = 1$, torej bi manjši koti dali $\Omega < 1$ in ne bi imeli asimptotičnega navijanja na $z = 0$. Ustreden kot na vzporedniku $z = -2$ je potem $\arcsin \left(\frac{e+1}{5} \sin(2 \arcsin \frac{1}{e+1}) \right)$.

Začnemo torej z nekim kotom $\alpha \in [\arcsin \left(\frac{e+1}{5} \sin(2 \arcsin \frac{1}{e+1}) \right), \arcsin \frac{e+1}{5}]$, ki potem direktno pod vzporednikom $z = -1$ znaša med $\psi_0 \in [2 \arcsin \frac{1}{e+1}, \frac{\pi}{2}]$. Pri vsakem prehodu $z = -1$ se kot razpolovi, tako da tik nad vzp. $z = -1$ dobimo zaporedje kotov (geodetko lahko usmerimo 'gor' ali 'dol'):

$$\frac{\psi_0}{2}, \frac{\psi_0}{4}, \frac{\psi_0}{16}, \dots, \frac{\psi_0}{2^n}, \dots \quad n = 1, 2, \dots$$

Pogoj je, da za nek $n = 1, 2, 3, \dots$ velja $1 = (e+1) \sin \frac{\psi_0}{2^n}$, oz.

$$\psi_0 = 2^n \arcsin \frac{1}{e+1}.$$

Rešitve so vsi n za katere je

$$2^n \arcsin \frac{1}{e+1} \in [2 \arcsin \frac{1}{e+1}, \frac{\pi}{2}],$$

kar velja le za $n = 1, 2$.

Ustrezna kota na vzporedniku $z = -2$ sta potem

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{e+1}{5} \sin(2^n \arcsin \frac{1}{e+1}) \right) \quad n = 1, 2.$$

3. naloga (30 točk)

Naj bo $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ in $\mathcal{P}(\alpha)$ lik na zgornji enotski hemisferi, katerega projekcija na xy -ravnino je lik

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \geq 0, y \leq x \tan \alpha, x \leq \cos \alpha\}.$$

Določi $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tako, da bo ploščina lika $\mathcal{P}(\alpha)$ največja.

Rešitev:

Lik je sestavljen iz dveh geodetk in enega vzporednika, katerega geodetska ukrivljenost je $-\frac{1}{\tan \alpha}$. Dolžina tega dela krivulje je $\frac{\pi}{2} \sin \alpha$. Notranji koti so $\alpha, \frac{\pi}{2}$ in 0 . Ploščina lika (po Gauss-Bonnet) znaša

$$P(\alpha) = \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Odvajamo in dobimo stac. točko $\alpha = \arcsin \frac{2}{\pi}$. Ker je $P(0) = P(\frac{\pi}{2}) = 0$, je pri $\alpha = \arcsin \frac{2}{\pi}$ dosežen maksimum, ki znaša $\simeq 0.33$.

