1. kolokvij

Uvod v diferencialno geometrijo
18.4.2018
$18^{00} - 20^{00}$ 2.01

1. [33%] Dana naj bo naravno parametrizirana ravninska krivulja $\vec{r}(s)$ z neničelno ukrivljenostjo, ki naj predstavlja pot zadnjega kolesa bicikla dolžine L.

   (a) Parametriziraj pot, ki jo opiše sprednje kolo bicikla ter izrazi ukrivljenost poti, ki jo opiše sprednje kolo s pomočjo ukrivljenosti poti zadnjega kolesa.

   (b) Poišči kakšno neničelno ukrivljenost, ki jo mora imeti pot zadnjega kolesa, da bo ukrivljenost poti sprednjega kolesa konstantno enaka 0.

   (c) Naj bo pot zadnjega kolesa sklenjena in konveksna. Pokaži, da je površina območja, ki ga omejujeta pot sprednjega in pot zadnjega kolesa enaka πL^2.

2. [33%] Naj bo $n \in \{2, 3, 4, ...\}$ in naj bo dana ploskev $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, parametrizirana z

$$\vec{r}(\lambda, z) = \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \cosh z \cos\lambda, \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \cosh z \sin\lambda, z \right), \; \lambda \in (0, 2\pi)\,, \; z \in \mathbb{R}\,.$$

   Določi funkciji $F(z)$ in $G(z)$ tako, da bo preslikava med ploskvama $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$, podana z

$$\phi(\vec{r}(\lambda, z)) = (F(z)\cos(n\lambda), F(z)\sin(n\lambda), G(z))$$

   lokalna izometrija.

3. [34%] Dani naj bosta ploskvi $\mathcal{S}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}^3$, parametrizirani z $\vec{r} : U \to \mathcal{S}$ in $\vec{\rho} : U \to \mathcal{R}$. Pravimo, da je parametrizacija $\vec{\rho}$ ploskve $\mathcal{R}$ ***pravokotna parametrizacija*** parametrizacije $\vec{r}$ ploskve $\mathcal{S}$, če za vsak $(u, v) \in U$ velja

$$\vec{\rho}_u = \vec{r}_u \qquad \vec{\rho}_v = \vec{n}\,,$$

   kjer je $\vec{n}$ normala na ploskev $\mathcal{S}$.

   (a) Naj bo U enostavno povezano območje ter naj ima parametrizacija $\vec{r}$ dane koeficiente prve fundamentalne forme E, G, F in druge fundamentalne forme L, N, M, kjer naj bo $N \neq 0$. Pokaži, da pravokotna parametrizacija obstaja natanko tedaj, ko velja

$$M = 0 \qquad E_v = -2L \qquad G_u = 0\,.$$

   (b) Pokaži, da za $\vec{\rho}$ (če obstaja) velja:

$$\vec{\rho} \text{ ohranja površine} \iff \vec{\rho} \text{ je konformna} \iff \vec{\rho} \text{ je izometrija}\,.$$

   (c) Ali obstaja pravokotna parametrizacija standardne parametrizacije enotske sfere?

   (d) Naj bo $\vec{r}$ konformna parametrizacija, t.j. prva fundamentalna forma naj bo oblike $\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$. Kakšnemu pogoju mora zadoščati funkcija E, če je $\vec{r}$ enaka pravokotni parametrizaciji svoje pravokotne parametrizacije?

Rešitve

1.
   - Sprednje kolo ima parametrizacijo $\vec{\gamma}(s) = \vec{r}(s) + L\vec{T}(s)$ (ni več naravna par.).

     Ukrivljenost je $\tilde{\kappa} = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|}$ in dobimo (upoštevamo $\tau = 0$ in Frenetove formule)
     $$\tilde{\kappa} = \frac{|\kappa + L\kappa' + L^2\kappa^3|}{\sqrt{1 + L^2\kappa^2}^3}$$
   - Intuitivno je jasno, da takšna pot obstaja, konkretno pa mora veljati, da je pot zadnjega kolesa takšna, da je
     $$L\kappa' + \kappa = -L^2\kappa^3$$
     od koder dobimo netrivialne rešitve oblike $\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{Ce^{\frac{2s}{L}} - L^2}}$.
   - Direktno uporabimo formulo za ploščino $\frac{1}{2}\int_a^b (x\dot{y} - y\dot{x})\,dt$ in upoštevamo, da lahko pišemo $x'(s) = \cos\varphi(s)$ in $y'(s) = \sin\varphi(s)$ ter, da je $\varphi(0) = 0$ in $\varphi(\ell) = 2\pi$ (kjer je ℓ dolžina poti zadnjega kolesa).

2. Prva fundamentalna za ploskev S je $E = \frac{n^2}{n^2-1}\cosh^2 z$, $F = 0$ in $G = 1 + \frac{n^2}{n^2-1}\sinh^2 z$. Za ploskev R pa dobimo $\bar{E} = n^2F(z)^2$, $\bar{F} = 0$ in $\bar{G} = F'(z)^2 + G'(z)^2$. Iz pogoja za izometrijo (da je $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ in $G = \bar{G}$) dobimo nazadnje:
   $$F(z) = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\cosh z \qquad G(z) = \sinh(z)\,.$$

3. Pogoj je ujemanje mešanih odvodov $\vec{\rho}_{uv} = \vec{\rho}_{vu}$, oziroma $\vec{r}_{uv} = \vec{n}_u$, kar pomnožimo po vrsti z $\vec{n}$, $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$ in dobimo ravno opisane pogoje. Obratno, ker je $M = 0 = \vec{r}_{uv}\vec{n}$, velja $\vec{r}_{uv} = \alpha\vec{n}_u + \beta\vec{n}_v$ ($\vec{n}_u, \vec{n}_v$ sta tangentna na ploskev). Če to pomnožimo skalarno z $\vec{r}_u$ in upoštevamo $E_v = -2L$, dobimo $\alpha = 1$. Če pomnožimo še z $\vec{r}_v$ dobimo pa pogoj $\beta N = 0$ od koder sledi $\beta = 0$. Torej res velja $\vec{r}_{uv} = \vec{n}_u$, torej pogoj enakosti mešanih odvodov je izpoljnjen in na enostavno povezanem območju lahko sistem parcialnih diferencialnih enačb $\vec{\rho}_u = \vec{r}_u$ in $\vec{\rho}_v = \vec{n}$ rešimo (pri nekem začetnem pogoju).

   Prva F.F. za $\vec{\rho}$ je oblike $\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, kar pomeni, da so vsi trije pojmi (konf., izom., ...) ekvivalentni.

   Pri standardni parametrizaciji enotske sfere pogoji niso izpoljnjeni, tako da ne obstaja.

   Pogoj je ravno $E = 1$.