

2. kolokvij

Uvod v diferencialno geometrijo

28.5.2018

18⁰⁰ – 20⁰⁰ 2.05

1. [33%] Dana je ploskev $\mathcal{S}$ s parametrizacijo

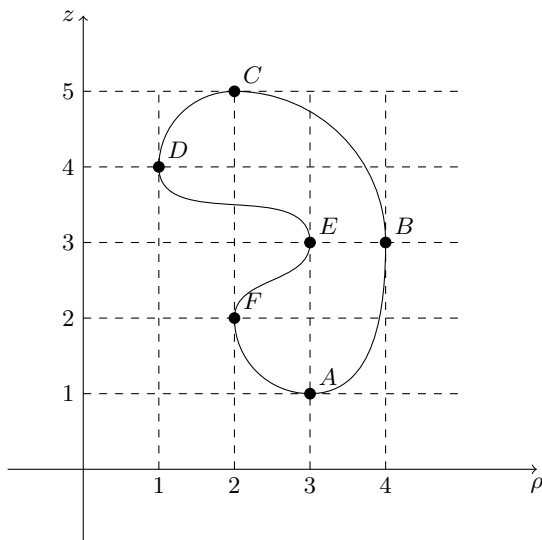
$$\vec{r}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \ln r) \quad (r, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi).$$

- (a) Pokaži, da je vsaka asimptotična krivulja na ploskvi $\mathcal{S}$ podana implicitno z eno izmed enačb

$$\ln r + \varphi = \xi \quad \text{ali} \quad \ln r - \varphi = \mu \quad \text{kjer sta } \xi, \mu \in \mathbb{R}.$$

- (b) Ploskev $\mathcal{S}$ reparametriziramo s pomočjo novih spremenljivk ξ, μ , kjer velja $\xi = \ln r + \varphi$ in $\mu = \ln r - \varphi$. Določi drugo fundamentalno formo ploskve $\mathcal{S}$ v parametrizaciji s spremenljivkama ξ, μ . Katere so asimptotične krivulje v tej parametrizaciji?
- (c) Naj bo $\mathcal{R}$ poljubna ploskev, za katero velja $K(p) < 0$ za vsak $p \in \mathcal{R}$. Pokaži, da skozi vsako točko ploskve potekata natanko dve asimptotični krivulji.

2. [33%] Dana je rotacijska ploskev, ki jo dobimo tako, da krivuljo s spodnje slike



zavrtimo okoli z -osi.

- (a) Kakšen kot glede na meridian naj oklepa geodetka skozi točko B , da se bo asimptotično bližala vzporedniku skozi točko D ?
- (b) Ali obstaja kakšna geodetka, ki se asimptotično približuje vzporedniku skozi točko E ?
- (c) Kakšen kot glede na meridian naj oklepa geodetka skozi točko A , da se bo odbila od vzporednika skozi točko C ?

3. [34%] Ploskev $\mathcal{S}$ je dana z grafom funkcije $f(x, y) = xy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Določi povprečno Gaussovo ukrivljenost dela ploskve za $(x, y) \in B(0, 1)$.

$$\left(\text{Povprečna Gaussova ukrivljenost } \bar{K} \text{ dela ploskve } \mathcal{D} \text{ je : } \bar{K} = \frac{\iint_{\mathcal{D}} K \, dS}{\iint_{\mathcal{D}} dS} \right)$$

(b) Pokaži, da je poljubni dve točki na ploskvi $\mathcal{S}$ možno povezati s potjo, ki je odsekoma sestavljena iz geodetk.

(Namig: Premice znotraj ploskve so zmeraj geodetke.)

(c) S pomočjo Gauss-Bonnetova izreka pokaži, da poljubni dve točki ploskve $\mathcal{S}$ povezuje največ ena geodetka.

Rešitve

1. Dobimo $L = \frac{-1}{r\sqrt{1+r^2}}$, $M = 0$ in $N = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$. Asimptotične krivulje so dane z $\kappa_n = 0$:

$$\frac{-1}{r\sqrt{1+r^2}}\dot{r}^2 + \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\dot{\varphi}^2 = 0 \longrightarrow \dot{r} = \pm r\dot{\varphi}$$

od koder dobimo pogoj za asimptotične krivulje $\ln r \pm \varphi = \text{konst.}$

Reparametrizacija $\vec{\rho}$ je dana z $\vec{r}(r, \varphi) = \vec{\rho}(\xi(r, \varphi), \mu(r, \varphi))$.

Dobimo $FF2 = -\frac{e^{\frac{\xi+\mu}{2}}}{4\sqrt{1+e^{\xi+\mu}}} d\xi d\mu$, torej so $\xi = \text{konst.}$ in $\mu = \text{konst.}$ asimptotične krivulje.

2. (a) Pogoj je $1 = 4 \sin \psi$.
 (b) Ne obstaja, saj bi moralo veljati $\rho \geq 3$, takih točk pa v okolici E ni.
 (c) Pogoj je $2 = 3 \sin \psi$.
3. (a) Gaussova ukr. $K = \frac{-1}{(1+x^2+y^2)^2}$ in za povprečno dobimo

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \frac{\iint_{B(0,1)} \sqrt{1+x^2+y^2} \frac{-1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy}{\iint_{B(0,1)} \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy} = \\ &= \frac{2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} \frac{-1}{(1+r^2)^2} r dr}{2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} r dr} = -\frac{9}{4} \frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt{8}-1}. \end{aligned}$$

- (b) Premice znotraj ploskve (x, y_0, xy_0) in (x_0, y, x_0y) za x_0, y_0 konstanti so geodetke in preko dveh takih lahko vsako točko povežemo z izhodiščem.
- (c) Denimo, da imamo od A do B dve različni geodetki (ki naj se nikjer ne sekata, sicer lahko B nadomestimo s prvim presečiščem). Obe geodetki torej omejujeta nek dvo-kotnik na $\mathcal{S}$ in iz Gauss-Bonnetove formule

$$\int_{\partial D} \kappa_g ds = \alpha + \beta - \iint_D K dS$$

dobimo, da mora biti vsota notranjih kotov $\alpha + \beta < 0$, kar pa ne gre.