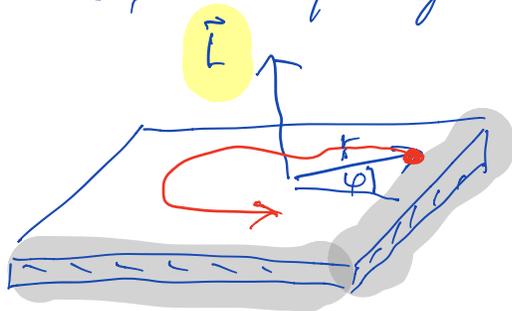


Gibanje delca v sferičnem potencialu

Osnovna delca v potencialu

$$V(\vec{r}) = V(r),$$

verno je, da je gibanje **rovinsko**,



že znamo:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

φ je **ciklična** koordinata, zato

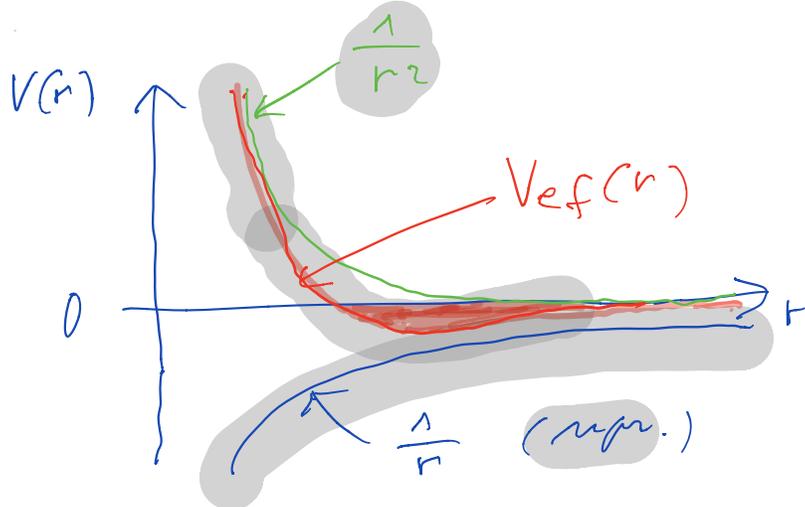
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \Rightarrow m r^2 \dot{\varphi} = l = \text{konst.}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{m r^2}$$

definiramo **efektivni potencial**

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2m r^2}$$

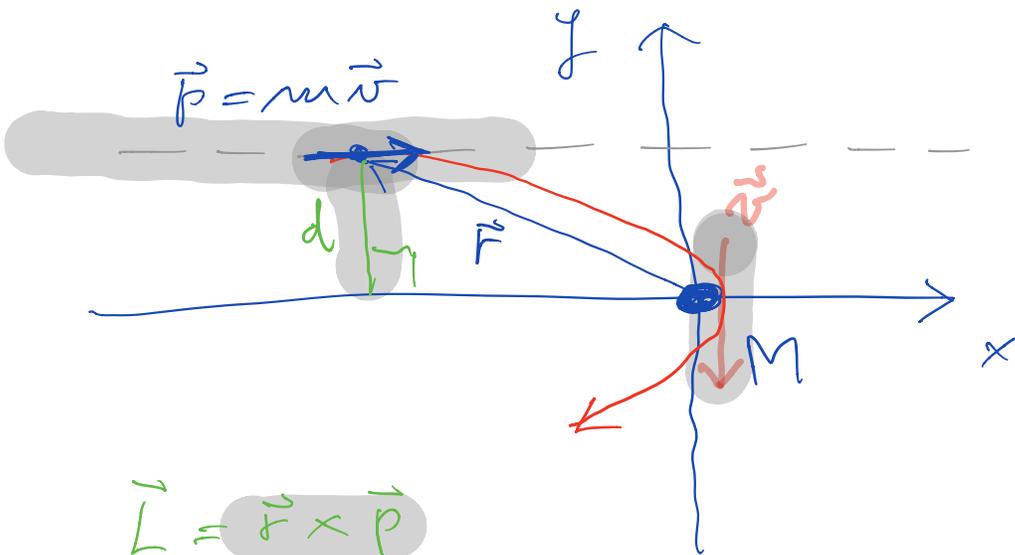
centrifugalni



2

Zohoj je centrifugalni potencial
adhezijem za $v \rightarrow 0$?

V_{cf} je rotacijska (kinetična)
energija delca; pri konstantni
vrtilni količini l .



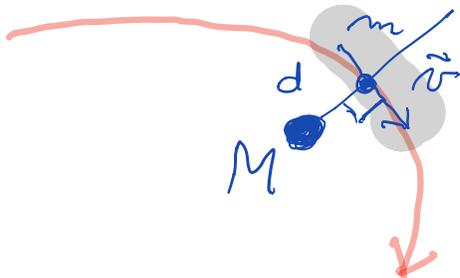
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$|\vec{L}| = \underline{l} = m v d = \underline{l_{const.}}; \quad d = \text{"impact parameter"}$$

$$V_{cf} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \leftarrow \text{tangential hitost}$$

$$l = m v d$$

$$v = \frac{l}{m d} \Rightarrow V_{cf} = \frac{l^2}{2 m d^2}$$



$$\dot{r} = 0$$

$$v = r \dot{\varphi}$$

3. Nodolgiņiem liet Σ zivs (1D):

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r); \quad V_{\text{ef}} = V + \frac{l^2}{2mr^2}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - V_{\text{ef}}(r)}$$

$$\int_{t_0}^t dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}(r)}} \Rightarrow t = f(r)$$

Na ta mazin tery, delimuo $r(t) = f(t)^{-1}$.
Koko pe acitate? To je $r(\varphi)$.

Vemus, da

$$m r^2 \dot{\varphi} = l$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{m r^2} \quad \text{oz.} \quad dt = \frac{m r^2}{l} d\varphi,$$

zeto φ

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm \sqrt{\frac{1}{2m}} \int_{r_0}^{r(\varphi)} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{ef}}(r)}} \Rightarrow \varphi = g(r)$$

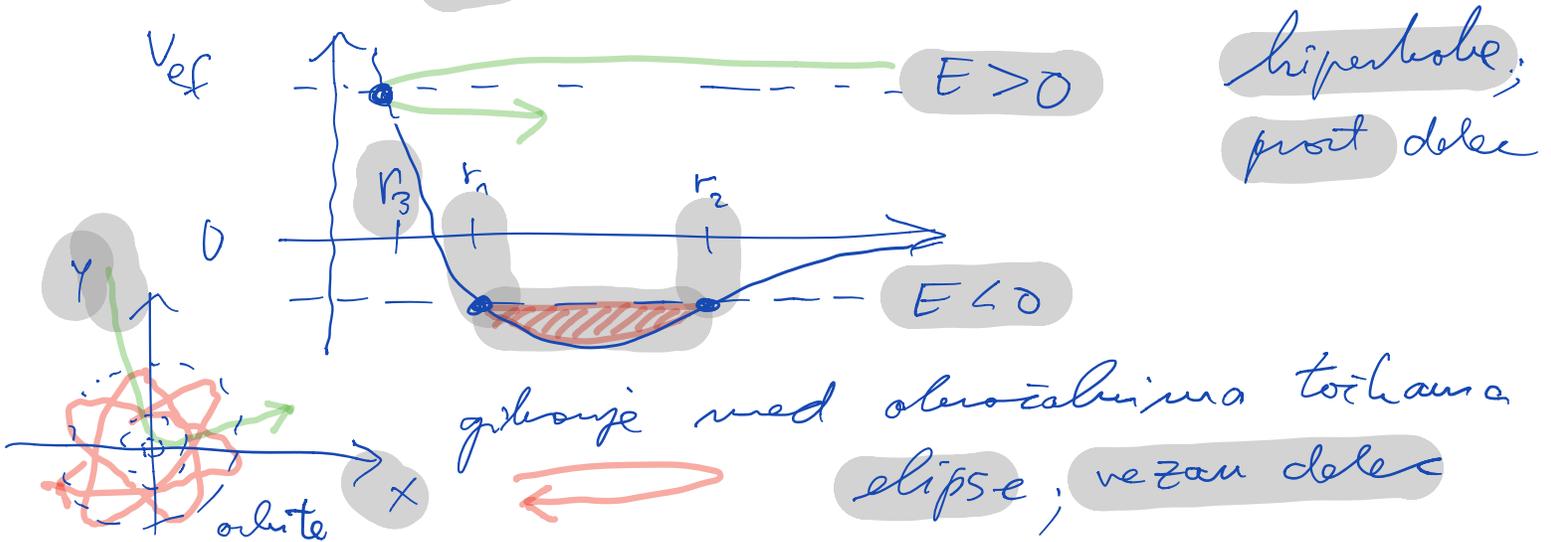
in bronim $\rightarrow r(\varphi) = g^{-1}(\varphi)$.

4

Klorifikacija orbit

Fiksirani kvantanti: E in $l \neq 0$. Če $l=0$, je raven sferičnejša (prosti pad).

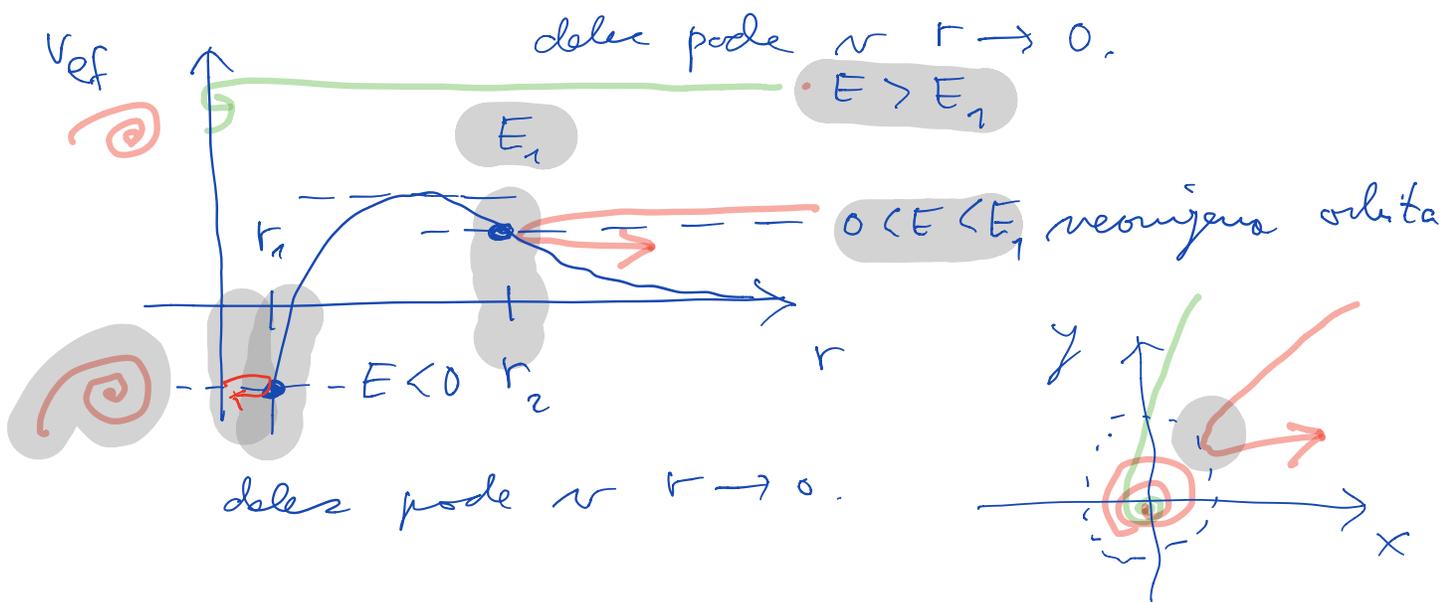
① $V(r) = -\frac{|a|}{r}$ (Kepler)



② $V = -\frac{|a|}{r^\beta}$

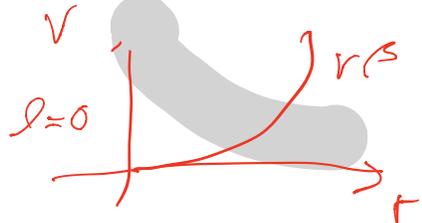
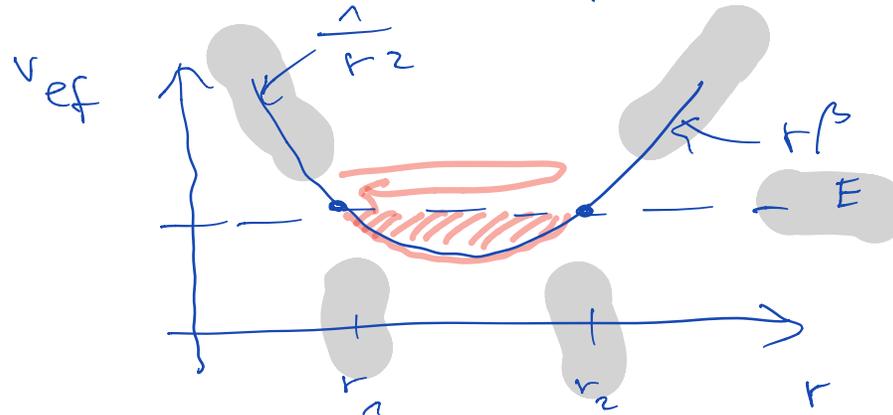
• če je $0 < \beta < 2$, je unifotično kot $\beta=1$

•• če je $\beta > 2$ je pri $r \rightarrow V_{ef} < 0$:



(3)

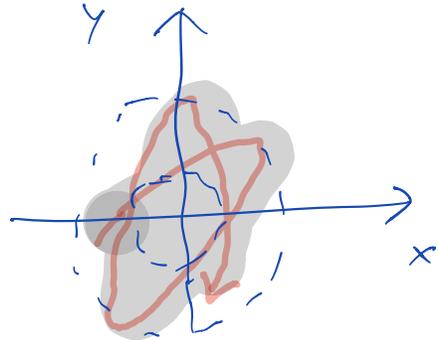
$V(r) = |\alpha| r^\beta, \beta > 0$



vedno omejeno za $l > 0$

za $l=0$ in $\beta=2$: mikalo (elipse)

orbite



Rešljivi primeri

za splošen potencial

$V = \alpha r^\beta$

se lahko reši za

• $\beta = -2, -1, 2$ se reši z integralom

$\int \frac{dr}{\sqrt{E - V_{ef}}}$

o trigonometričnimi funkcijami

•• $\beta = -6, -4, -3, 1, 4, 6$

eliptični integrali

•• se mogoče drugi primeri so rešljivi

6
Primer je Keplerjev problem
(+vaje)

definiramo

$$u = \frac{1}{r}, \quad dr = -\frac{du}{u^2}, \quad \text{zato } V = -\alpha u,$$

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \mp \int_{u_0}^{u(\varphi)} \frac{l du}{\sqrt{E - \frac{l^2}{2m} u^2 + \alpha u}} = \\ &= \mp \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{d^2 - (u-e)^2}} = \\ &= \mp \arccos \left(\frac{c-u}{d} \right) \Big|_{u_0}^u. \end{aligned}$$

Rešitev je torej

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \mp \arccos \frac{c-u}{d} \pm \arccos \frac{c-u_0}{d} \\ \pm \arccos \frac{c-u}{d} &= \pm \arccos \frac{c-u_0}{d} + \varphi_0 - \varphi \end{aligned}$$

$$\frac{c-u}{d} = \cos(\varphi - \varphi_0 - \varphi_1)$$

ozi.

$$u = c - d \cos(\varphi - \varphi_0 - \varphi_1) = \frac{1}{r}$$

in končno

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(\varphi - \tilde{\varphi})} + \text{konstante}$$

$c, d, \varphi_1, \varepsilon, p$
(vaje)

⇒ stožnica

Neobvezno, ..., .., .., .., .., .., ..

• Binetova zveza

Tako kot v zgornjem primeru je pogosto ugodno računati $\frac{1}{r} = u(\varphi)$.

Enačba gibanja iz Lagrangeovih enačb je

$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = f(r)$ in $\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}$,

vaje
D.N.

od koder sledi, ko izrazimo $\dot{\varphi}$ in \dot{r} , Binetova zveza (enačba)

$\frac{d^2}{d\varphi^2} u + u = F(u)$ (D.N.)

hjer je $F(u) = -\frac{m}{l^2} \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right)$.

za Keplerjev problem $V = -\frac{\alpha}{r}$ oz.

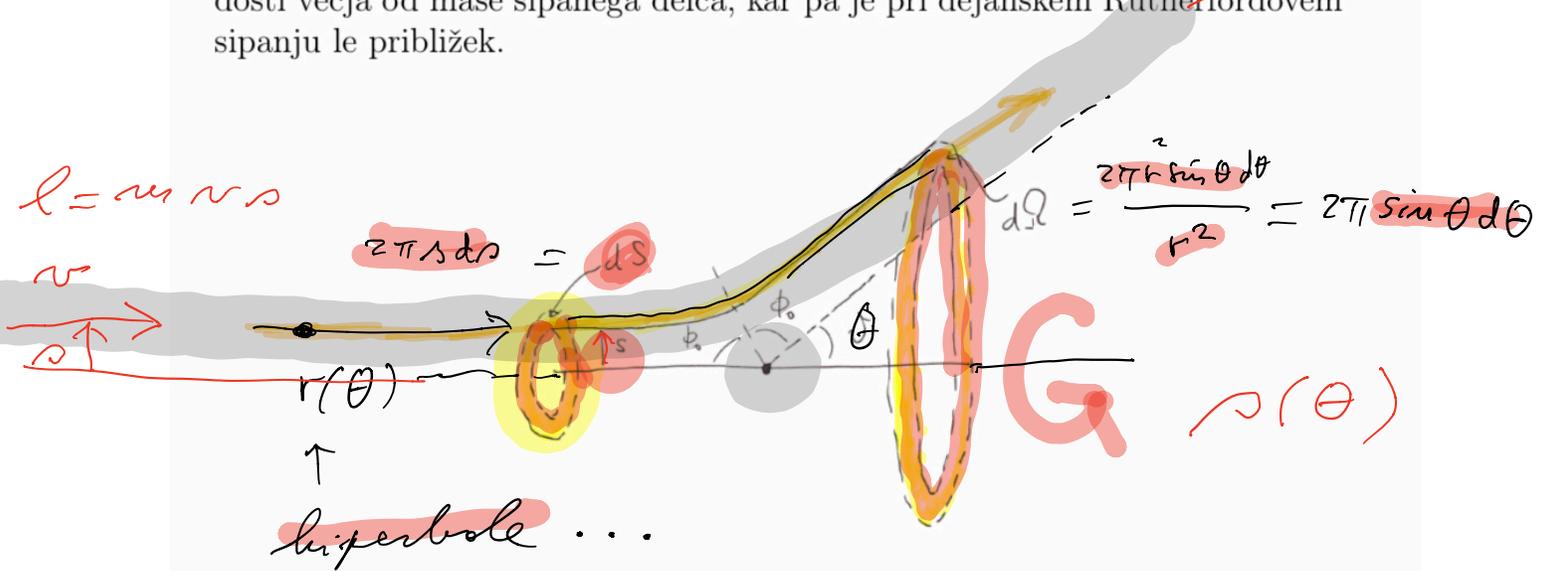
$f\left(\frac{1}{u}\right) = -\alpha u^2$ velja torej

$\frac{d^2}{d\varphi^2} u + u = \frac{\alpha m}{l^2}$, od koder sledi enačba stožnice,

$u = A \cos \varphi + B \sin \varphi + C = \frac{1}{r(\varphi)}$.

Sipanje delcev na Coulombovem potencialu

Obravnavajmo sedaj nevezano gibanje v centralnem potencialu $V = \tilde{\alpha}/r$. Privzeli bomo odbojni potencial $\tilde{\alpha} > 0$, čeprav so rešitve za privlačni potencial podobne. Primer takega gibanja je sipanje nabitih delcev (prvotno delcev α) na potencialu jedra (oz. atoma, saj imajo elektroni dosti manjšo maso), kar je zgodovinsko znano kot Rutherfordovo sipanje, ki je vodilo do razumevanja zgradbe atoma. V računu upoštevamo, da je masa jedra $M \gg m$ dosti večja od mase sipanega delca, kar pa je pri dejanskem Rutherfordovem sipanju le približek.



Želimo izračunati diferencialni sipalni presek, definirano kot razmerje med tokom delcev sipanih v prostorski kot $d\Omega$ in vpadlo enakomerno gostoto toka vpadlih delcev

$$\sigma(\Omega) d\Omega = \frac{dI}{j} = \frac{j ds}{j} \quad (3.52)$$

Želimo σ izraziti v θ in $d\Omega$ in dobimo zvezo

$$\frac{r ds}{\sin \theta d\theta} = \sigma(\theta) = \frac{\tilde{\alpha}^2}{8E^2 \tan^2(\frac{\theta}{2}) \sin^2(\frac{\theta}{2}) \sin \theta} = \frac{\tilde{\alpha}^2}{16E^2 \sin^4(\frac{\theta}{2})} \quad (3.63)$$

kar je znana **Rutherfordova formula** za sipanje, prvotno za delce α na jedru. Izkaže se, da velja enak izraz tudi znotraj kvantne mehanike, če se zanemari relativistične efekte. Slednje je še ena posebnost potenciala $V \propto 1/r$.

Pri sipanju definiramo tudi totalni sipalni presek,

$$\sigma_{tot} = \int \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (3.64)$$

Lahko ga tudi izrazimo kot $\sigma_{tot} = I/j$ kot celotni tok sipanih delcev deljeno z vpadlo gostoto toka, torej predstavlja efektivno ploščino sipalnega centra. Hitro ugotovimo, da je v primeru Rutherfordovega sipanja (3.63) $\sigma_{tot} = \infty$, saj integral divergira na spodnji meji. To je posledica počasnega padanja Coulomskega potenciala, kjer se tudi zelo oddaljeni delci odklonijo za majhen θ , kar vodi do efektivno neskončnega sipalnega preseka.

rozlične topologije orbit
(~~du~~ ~~telesu~~ ~~tubogj~~)

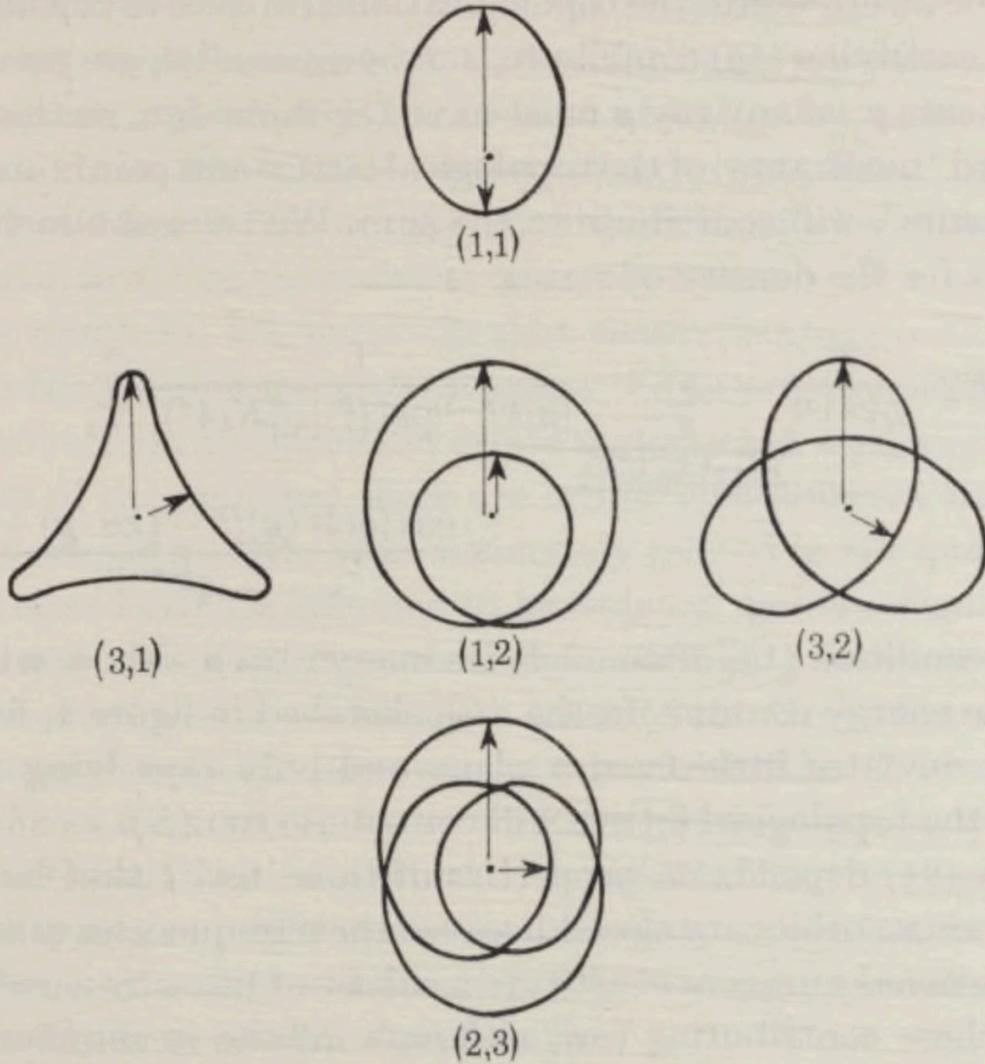


FIGURE 2. Some simple orbit topologies (M_S, M_L) in central potential well with repulsive core. Arrows indicate r_1 and r_2 .

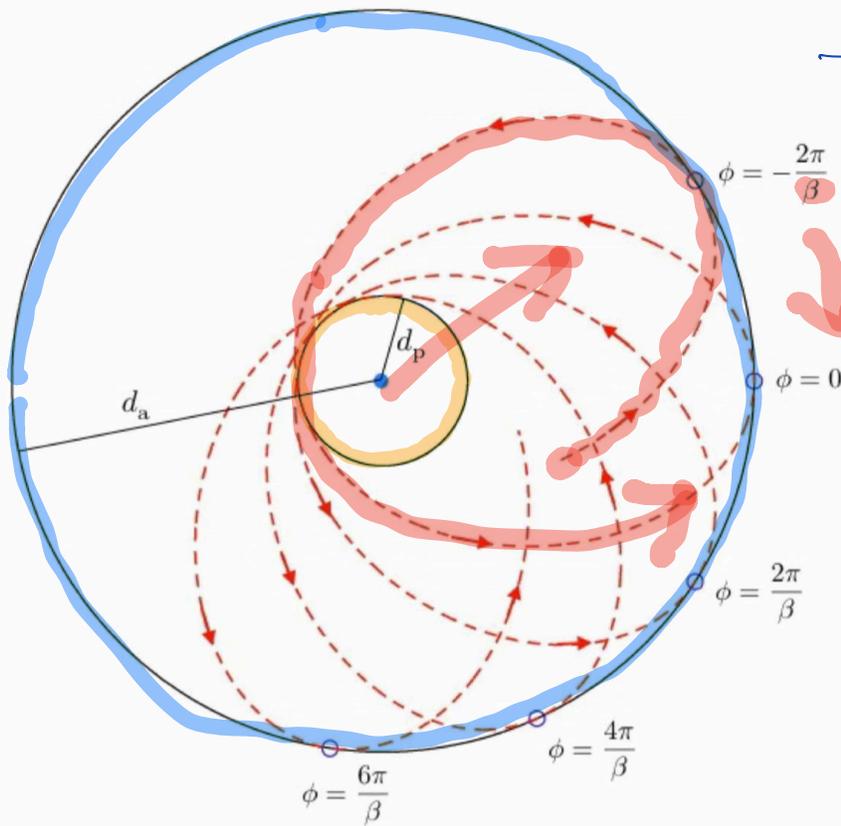
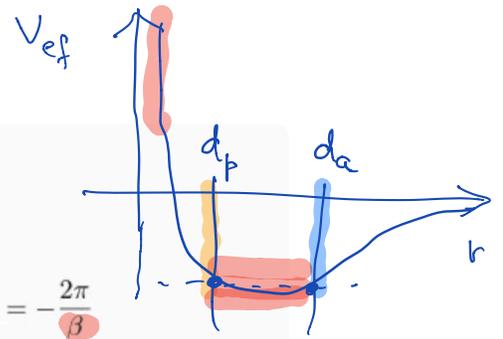
Zamirnin rofjn problem

mej bo: $r(\phi) = \frac{r_0}{1 - \varepsilon \cos \beta \phi}$; $V(r) = \frac{k}{r} + \frac{C}{2r^2}$

$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{C}{2r^2}$

$k = \frac{\beta^2}{r_0} \frac{l^2}{m}$, $C = (\beta^2 - 1) \frac{l^2}{m}$

Dokaz: iz Binetove zvezi upr.



$\vec{A}(t)$

Figure 9.3: Precession in a soluble model, with geometric orbit $r(\phi) = r_0/(1 - \varepsilon \cos \beta\phi)$, shown here with $\beta = 1.1$. Periapsis and apoapsis advance by $\Delta\phi = 2\pi(1 - \beta^{-1})$ per cycle.