

Teorija mere: 1. izpit

22.1.2020

1. Pravimo, da družina $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}X$ loči točke množice X , če za vsaka dva različna elementa $x, y \in X$ obstaja tak $D \in \mathcal{D}$, da je $x \in D$ in $y \notin D$.

(a) Če $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}X$ loči točke števne množice X , dokaži, da je $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{P}X$.

(b) Naj bo X neštevna množica. Dokaži, da obstaja σ -algebra na X , ki loči točke množice X in ni enaka $\mathcal{P}X$.

2. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna skoraj povsod glede na Lebesguovo σ -algebro.

(a) Ali je f Borelovo merljiva? Dokaži ali najdi protiprimer.

(b) Ali je f Lebesguovo merljiva? Dokaži ali najdi protiprimer.

3. Izračunaj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{n}}{x^2}\right) \cos(x) e^{-\frac{nx + \ln n}{n}} dx.$$

Pri izračunu vse korake dobro utemelji.

4. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s končno mero in $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Dokaži, da za vsako funkcijo $f \in L^q(\mu)$ velja

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

(Opomba: iz tega sledi, da je $L^p(\mu) \supseteq L^q(\mu)$.)