

Teorija mere: 2. izpit

4. junij 2020

Čas pisanja je 120 minut. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. nalogaNaj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s končno mero in μ^* pripadajoča zunanja mera, tj. za $Y \subseteq X$ naj bo

$$\mu^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) : (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \text{ je pokritje za } Y \right\}$$

a) Za $Y \subseteq X$ naj bo $\mu_*(Y) = \mu(X) - \mu^*(X \setminus Y)$. Dokaži, da velja

$$\mu_*(Y) = \sup \{ \mu(A) : A \in \mathcal{A}, A \subseteq Y \}.$$

b) Naj bo $Y \subseteq X$. Dokaži, da obstajata taki množici $A_Y \in \mathcal{A}$ in $A^Y \in \mathcal{A}$, da je $A_Y \subseteq Y \subseteq A^Y$ in velja

$$\mu_*(Y) = \mu(A_Y) \quad \text{ter} \quad \mu^*(Y) = \mu(A^Y).$$

c) Naj bo $Y \subseteq X$. Če obstaja taka množica $A \in \mathcal{A}$, $A \subseteq Y$, da je $\mu^*(Y \setminus A) = 0$, dokaži, da je Y μ^* -merljiva.**d)** Dokaži, da je množica $Y \subseteq X$ μ^* -merljiva natanko tedaj, ko je $\mu^*(Y) = \mu_*(Y)$.

2. naloga

Naj bo m Lebesguova mera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ in $f \in L^1(m)$. Za $a \in (0, \infty)$ in $x \in \mathbb{R}$ definiramo $f_a(x) = f(ax)$. Dokaži, da je

$$\int_{\mathbb{R}} f_a \, dm = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f \, dm.$$

3. naloga

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s σ -končno mero in $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow ([0, \infty], \mathcal{B}_{[0, \infty]})$ merljiva funkcija.

a) Dokaži, da je

$$t \longmapsto \mu(\{x \in X : f(x) > t\})$$

merljiva preslikava iz prostora $((0, \infty), \mathcal{B}_{(0, \infty)})$ v prostor $([0, \infty], \mathcal{B}_{[0, \infty]})$.

b) Naj bo m Lebesguova mera na $\mathcal{B}_{(0, \infty)}$. Dokaži enakost

$$\int_X f \, d\mu = \int_{(0, \infty)} \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) \, dm(t).$$

4. naloga

Naj bo m Lebesguova mera na $((0, 1), \mathcal{B}_{(0,1)})$ in $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^3(m)$ tako zaporedje funkcij, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n|^3 dm = 0$. Dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ funkcija $x \mapsto \frac{f_n(x)}{\sqrt{x}}$ pripada $L^1(m)$ in, da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{f_n(x)}{\sqrt{x}} dm(x) = 0.$$