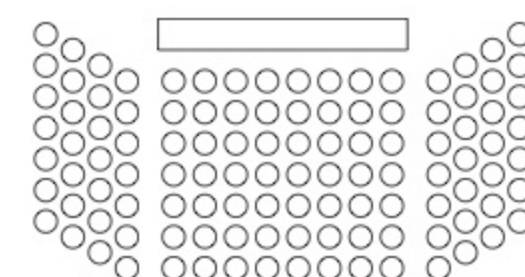


# 1. izpit iz Algebre 1 za finančnike

13. 6. 2022

Veliko uspeha!



Sedež (2.05)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

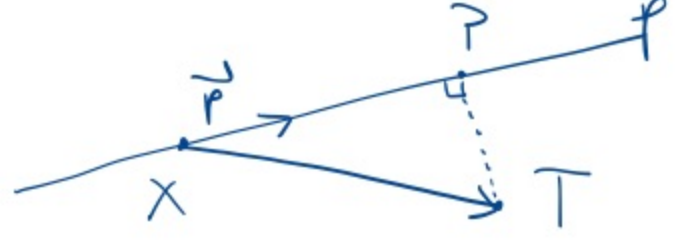
Vpisna številka

Ime in priimek

## 1. naloga

Dana je premica  $p: \frac{x-1}{2} = y+1 = -z-1$ , ravnina  $\Sigma: 3x-2y+z=1$  ter točka  $T(0,1,1)$ .

- Poišči točko  $P$  na premici  $p$ , ki je najbližje točki  $T$ .
- Določi premico  $q$ , ki ne seka ravnine  $\Sigma$ , seka premico  $p$  in gre skozi točko  $T$ .
- Določi vse  $a \in \mathbb{R}$ , da premica  $r: \frac{x-\sqrt{2}}{3} = -y + \sqrt{3} = a(z - \sqrt{6})$  ne seka ravnine  $\Sigma$ .

a)  Izberemo poljubno točko  $X(1,-1,-1)$  na  $p$ .  
 Tedaj je  $\vec{r}_p = \vec{r}_x + \vec{XP}$  in  $\vec{XP}$  je projekcija vektorja  $\vec{XT} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  na  $\vec{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .  
 Torej  $\vec{XP} = \text{proj}_{\vec{p}} \vec{XT} = \frac{\vec{XT} \cdot \vec{p}}{\|\vec{p}\|^2} \vec{p} = \frac{[-1, 2, 2] \cdot [2, 1, -1]}{4+1+1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{-2+2-2}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .  
 Torej  $\vec{r}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -4/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$ , zato  $P(1/3, -4/3, -2/3)$ .

b) Iskana premica leži na ravnini  $\Sigma'$ , ki je vzporedna ravnini  $\Sigma$  in vsebuje točko  $T$ :

$$\Sigma': 3x-2y+z+d=0$$

$$T \in \Sigma' \Rightarrow 0-2+1+d=0 \Rightarrow d=1 \Rightarrow \Sigma': 3x-2y+z+1=0$$

Iskana premica vsebuje točko  $Y$ , ki je presek ravnine  $\Sigma'$  in premice  $p$ . Parametrične oblike enačbe premice  $p$  je  $x=2t+1, y=t-1, z=-t-1$ .

$$Y = \Sigma' \cap p: 3(2t+1) - 2(t-1) + (-t-1) + 1 = 0$$

$$3t+5=0$$

$$t = -5/3 \Rightarrow Y(-7/3, -8/3, 2/3)$$

Smerni vektor iskane premice je  $\vec{YT} = [7/3, 11/3, 1/3]^T$  in zato tudi  $[7, 11, 1]^T$ .

Iskana premica je  $\frac{x}{7} = \frac{y-1}{11} = z-1$ .

c) Premica  $g$  ne seka ravnine  $\Sigma$ , če je njen smerni vektor  $\vec{g} = [3, -1, 1/a]^T$  pravokoten na normalni vektor  $\vec{n} = [3, -2, 1]$  ravnine  $\Sigma$ :

$$0 = \vec{g} \cdot \vec{n} = 9 + 2 + 1/a \Rightarrow \underline{\underline{a = -1/11}}$$

## 2. naloga

Naj bo  $v_1 = [3, 1, 0, 0]^T$ ,  $v_2 = [-2, -1, 0, 0]^T$ ,  $v_3 = [-1, 1, 2, 1]^T$  in  $v_4 = [0, 1, 7, 4]^T$ . Linearna preslikava  $A$  je dana s predpisom  $Av_1 = [1, 0, -1]^T$ ,  $Av_2 = [0, 1, 1]^T$ ,  $Av_3 = [2, 1, 0]^T$  in  $Av_4 = [0, 0, 1]^T$ .

a) Določi matriko za  $A$  v standardnih bazah.

b) Naj bo na  $\mathbb{R}^4$  dan skalarni produkt v katerem je  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  ortonormirana baza. Določi kako ortonormirano bazo za  $U = \text{Lin}\{[4, 2, 0, 0]^T, [1, 2, 2, 1]^T, [28, 0, 1, 2]^T\}$ .

a) Naj bo  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . Tedaj je  $A_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Prehodna matrika je  $P_{\mathcal{B}\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ . Ker iščemo  $A_{\mathcal{S}\mathcal{S}} = A_{\mathcal{S}\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B}\mathcal{S}}$ , izračunajmo še  $P_{\mathcal{B}\mathcal{S}}^{-1} = P_{\mathcal{S}\mathcal{B}}$ :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -3 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -3 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -2 & | & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 & | & 1 & -3 & 16 & -28 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & | & 1 & -2 & 12 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & -3 & 13 & -22 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & 10 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 10 & -17 \\ 1 & -3 & 13 & -22 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{\mathcal{S}\mathcal{S}} = A_{\mathcal{S}\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 10 & -17 \\ 1 & -3 & 13 & -22 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 18 & -31 \\ 1 & -3 & 17 & -29 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}}}$$

b) Velja  $u_1 = [4, 2, 0, 0]^T = 2v_2 = [0, 2, 0, 0]_{\mathcal{B}}$

Ostale dva vektorski, ki določata podprostor  $U$  lahko zapišemo v bazi  $\mathcal{B}$  s pomočjo matrike  $P_{\mathcal{B}\mathcal{S}}$ :

$$u_2 = [1, 2, 2, 1]^T = P_{\mathcal{B}\mathcal{S}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [0, -1, 1, 0]_{\mathcal{B}},$$

$$u_3 = [28, 0, 1, 2]^T = P_{\mathcal{B}\mathcal{S}} \begin{bmatrix} 28 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [4, -3, -10, 3]_{\mathcal{B}}.$$

Za ortonormirano bazo prostora  $U$  uporabimo Gram-Schmidtov postopek:

$$w_1 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{2} u_2 = [0, 1, 0, 0]_{\mathcal{B}} = [2, 1, 0, 0]_{\mathcal{S}}$$

$$\tilde{w}_2 = u_2 - \langle w_1, u_2 \rangle w_1 = [0, -1, 1, 0]_{\mathcal{B}} - \langle [0, 1, 0, 0]_{\mathcal{B}}, [0, -1, 1, 0]_{\mathcal{B}} \rangle [0, 1, 0, 0]_{\mathcal{B}} = [0, 0, 1, 0]_{\mathcal{B}}$$

$$\|\tilde{w}_2\| = 1 \Rightarrow w_2 = \tilde{w}_2 = [0, 0, 1, 0]_{\mathcal{B}} = [-1, 1, 2, 1]_{\mathcal{S}}$$

$$\tilde{w}_3 = u_3 - \langle w_1, u_3 \rangle w_1 - \langle w_2, u_3 \rangle w_2 = [4, -3, -10, 3]_{\mathcal{B}} - \langle [0, 1, 0, 0]_{\mathcal{B}}, [4, -3, -10, 3]_{\mathcal{B}} \rangle [0, 1, 0, 0]_{\mathcal{B}} - \langle [0, 0, 1, 0]_{\mathcal{B}}, [4, -3, -10, 3]_{\mathcal{B}} \rangle [0, 0, 1, 0]_{\mathcal{B}} \\ = [4, -3, -10, 3]_{\mathcal{B}} - 3[0, 1, 0, 0]_{\mathcal{B}} + 10[0, 0, 1, 0]_{\mathcal{B}} = [4, 0, 0, 3]_{\mathcal{B}} \Rightarrow \|\tilde{w}_3\| = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\Rightarrow w_3 = \frac{1}{5} \tilde{w}_3 = \frac{1}{5} [4, 0, 0, 3]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{5} [12, 7, 21, 12]_{\mathcal{S}}$$

Oortonormirana baza za  $U$  je  $\{w_1, w_2, w_3\}$

### 3. naloga

Normalna matrika  $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ , za katero je  $\text{sl } A = 2$  in  $\det A = -3$ , ima eno lastno vrednost enako  $-1$ .

a) Določi vse lastne vrednosti matrike  $A$ .

b) Ali je lahko  $[i, 1, 2i]^T$  lastni vektor matrike  $A$ ?

c) Določi lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti  $-1$ , če je  $[3i, 5, 4i]^T$  lastni vektor matrike  $A$ .

a) Naj bodo  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2$  in  $\lambda_3$  lastne vrednosti normalne matrike  $A$ .

Torej je  $-1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{sl } A = 2$  in  $-1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \det A = -3$ .

Torej  $\lambda_2(3 - \lambda_2) = 3 \Rightarrow \lambda_2^2 - 3\lambda_2 + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$$\underline{\underline{\lambda_{2,3} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}}}$$

b) Matrika  $A$  ima tri različne lastne vrednosti, zato ima vsaka lastna vrednost le en lastni vektor.

Naj vektor  $[i, 1, 2i]^T$  pripada lastni vrednosti  $\lambda_k$ , t.j.  $A \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 2i \end{bmatrix} = \lambda_k \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 2i \end{bmatrix}$ .

Ker ima  $A$  realne koeficiente, velja  $A \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ -2i \end{bmatrix} = \bar{\lambda}_k \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ -2i \end{bmatrix}$ . Torej je  $[-i, 1, -2i]^T$  lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti  $\bar{\lambda}_k$ , zato  $k \neq 1$  in  $\bar{\lambda}_k \neq -1$ .

Ker je  $A$  normalna in je  $\lambda_k \neq \bar{\lambda}_k$ , sta lastna vektorja  $[i, 1, 2i]^T$  in  $[-i, 1, -2i]^T$  pravokotna.

$$\text{Toda } [i, 1, 2i]^T \cdot [-i, 1, -2i]^T = i(-i) + 1 \cdot 1 + 2i(-2i) = -1 + 1 - 4 = -4 \neq 0.$$

Torej  $[i, 1, 2i]^T$  ni lastni vektor normalne matrike  $A$ .

c) Kot v točki b) ugotovimo, da je tudi  $[-i, 3, -2i]^T$  lastni vektor (Opomba: Ker je  $[3i, 5, 4i]^T \cdot [-3i, 5, -4i]^T = -9 + 25 - 16 = 0$ , sta vektorja pravokotna)

Kot v b) vidimo, da lastna vektorja pripadata lastnim vrednostim  $\lambda_{2,3}$ .

Lastni vektor  $[z_1, z_2, z_3]^T$ , ki pripada lastni vrednosti  $\lambda_1$ , je pravokoten na

$[3i, 5, 4i]^T$  in  $[-3i, 5, -4i]^T$ . Torej

$$z_1(-3i) + z_2 \cdot 5 + z_3(-4i) = 0$$

$$z_1(3i) + z_2 \cdot 5 + z_3(4i) = 0$$

$$+ : \quad z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3z_1 + 4z_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{[4, 0, -3]^T}} \text{ je lastni za } \lambda_1 = -1.$$

#### 4. naloga

Naj bo

$$A_t = \begin{bmatrix} t+3 & t+1 & t & -4t & 2t+1 \\ -1 & 1 & 0 & 6t & 3t-1 \\ -t & -t & 2-t & 14t+3 & 3t+1 \\ 0 & 0 & 0 & 2t+2 & t \\ 0 & 0 & 0 & -4t & 2-2t \end{bmatrix}.$$

a) V odvisnosti od  $t \in \mathbb{R}$  določi jordanisko formo  $J(A_t)$ .

b) Za  $t = 0$  določi še prehodno matriko.

$$\begin{aligned} \text{a) } p_{A_t}(\lambda) &= \begin{vmatrix} t+3-\lambda & t+1 & t \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -t & -t & 2-t-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2t+2-\lambda & t \\ -4t & 2-t-\lambda \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & t+1 & t \\ -2+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -t & 2-t-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2t+2-\lambda & t \\ 4-2\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & t+1 & t \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -t & 2-t-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2t+2-\lambda & t \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{+}{=} (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & t+1 & t \\ 0 & 2+t-\lambda & t \\ 0 & -t & 2-t-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2t+2-\lambda & t \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{+}{=} (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & t+1 & t \\ 0 & 2+t-\lambda & t \\ 0 & -t & 2-t-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 2+t-\lambda & t \\ 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^4 \begin{vmatrix} 2+t-\lambda & t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{+}{=} (2-\lambda)^4 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{(2-\lambda)^5}} \end{aligned}$$

$\lambda=2$  je edina lastna vrednost

$$A_t - 2I = \begin{bmatrix} t+1 & t+1 & t & -4t & 2t+1 \\ -1 & -1 & 0 & 6t & 3t-1 \\ -t & -t & -t & 14t+3 & 3t+1 \\ 0 & 0 & 0 & 2t & t \\ 0 & 0 & 0 & -4t & -2t \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } t \neq 0: \text{rang}(A_t - 2I) &= \text{rang} \begin{bmatrix} t+1 & t+1 & t & -4t & 2t+1 \\ -1 & -1 & 0 & 6t & 3t-1 \\ -t & -t & -t & 14t+3 & 3t+1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6t & 3t-1 \\ 0 & 0 & -1 & 10t+3 & 5t+1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{+}{=} \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{+}{=} \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{+}{=} \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 4 \\ \Rightarrow A_t \text{ ima le en lastni vektor, zato je } J(A_t) &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

$$\text{ii) } t=0: \text{rang}(A_0 - 2I) = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow A_0 \text{ ima 3 lastne vektore, tj. } J(A_0) \text{ ima 3 blokke}$$

$$(A_0 - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{največja blokka je velikosti } 2 \times 2 \Rightarrow J(A_0) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}}$$

Izberimo dva vektorja  $v_1^{(2)}, v_2^{(2)} \in \ker(A_0 - 2I)^2 \setminus \ker(A_0 - 2I)$ . Na primer  $v_1^{(2)} = [1, 0, 0, 0, 0]^T$  in  $v_2^{(2)} = [0, 0, 0, 1, 0]^T$

Tedenj sta  $v_1^{(1)} = (A_0 - 2I)v_1^{(2)} = [1, -1, 0, 0, 0]^T$  in  $v_2^{(1)} = (A_0 - 2I)v_2^{(2)} = [0, 0, 3, 0, 0]^T$  lastni vektorja matrike  $A_0$ .

Iščemo še en lastni vektor (ki je neodvisen z vektorjema  $v_1^{(1)}$  in  $v_2^{(1)}$ ), t.j. tak vektor, ki reši sistem  $A_0 - 2I \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ . Tak je na primer  $v_3^{(1)} = [3, 0, 0, 1, -3]^T$ .

Prehodna matrika je

$$P = [v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, v_3^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$