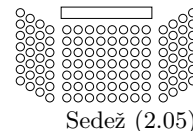


3. kolokvij iz Algebre 1 za finančnike

18. 5. 2022

Veliko uspeha!



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek

1. naloga

Naj bo $U = \text{Lin}\{v_1, v_2, v_3\}$ podprostor v $\mathbb{R}^4$, kjer je $v_1 = [1, 1, 1, 1]^T$, $v_2 = [1, 1, -1, -1]^T$, $v_3 = [1, -1, -1, -3]^T$.

a) Poišči kako ortonormirano bazo za U (glede na standardni skalarni produkt).

b) Zapiši matriko za pravokotno projekcijo $P: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ na prostor U v standardni bazi.

$$a) \|v_1\| = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{2} [1, 1, 1, 1]^T \quad (1)$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 1 + 1 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow v_2 \perp v_1 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{2} [1, 1, -1, -1]^T \quad (2)$$

$$u_3' = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\langle u_3, u_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

$$\langle u_3, u_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$v_4 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a+b-c-d=0 \\ a-b+c-d=0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1, R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b = -a, d = -b = a, c = -d = -a$$

$$u_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$B = \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$P_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad A_{BB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{BB}^{-1} = P_{BB}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$A_B = P_{BB} A_{BB} P_{BB}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

2. naloga

a) Za linearno preslikavo $A: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^9$ velja $\dim \ker(A - I) = \dim \ker(A + I)^2 = 2$ in njen karakteristični polinom je $p_A(\lambda) = (1 + \lambda)^6(1 - \lambda)^3$. Poišči vse možne jordske forme $J(A)$.

b) Za linearno preslikavo $B: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^9$ velja, da ima le eno lastno vrednost, $\text{rang}(B - 3I) = 5$ in $\dim \ker(B - 3I)^4 = 8$. Poišči vse možne jordske forme $J(B)$.

a) $\lambda_{1,2,3,4,5,6} = -1$, $\lambda_{7,8,9} = 1$ (2)

$\dim \ker(A - I) = 2 \Rightarrow 2$ kletke z $\lambda = 1$ (2)

$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$ (2)

$\dim \ker(A + I)^2 = 2 \Rightarrow \dim \ker(A + I) = 1$ ali $\dim \ker(A + I) = 2$. (2)

• $\dim \ker(A + I) = 1 \Rightarrow 1$ kletka

$\Rightarrow J_{-1} = \begin{bmatrix} -1 & & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & -1 \end{bmatrix}$ (2)

• $\dim \ker(A + I) = 2 \Rightarrow 2$ kletki

ker je $\dim \ker(A + I)^2 = \dim \ker(A + I) = 2$,

je največja kletka z $\lambda = -1$ velikosti 1×1 .

Tako dobimo 6 kletk, ker je vsota kot 2. ✗

(3)

Imamo le eno formo:

$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$ (1)

b) $\lambda_{1,2,3,4,5,6,7,8,9} = 3$

$\dim \ker(B - 3I) = 9 - \text{rang}(B - 3I) = 9 - 5 = 4 \Rightarrow$ imamo 4 kletke z $\lambda = 3$. (2)

ker je $\dim \ker(B - 3I)^4 = 8$ in je $\neq 3$ edina last. vr., je $\dim \ker(B - 3I)^5 = 9$. Največja kletka je velikosti 5×5 (4)

$J = \begin{bmatrix} 3 & & & & & & & & \\ & 3 & & & & & & & \\ & & 3 & & & & & & \\ & & & 3 & & & & & \\ & & & & 3 & & & & \\ & & & & & 3 & & & \\ & & & & & & 3 & & \\ & & & & & & & 3 & \\ & & & & & & & & 3 \end{bmatrix}$

ker potrebujemo 3 kletke z

$\begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$

je edina možnost

$2 + 1 + 1$

(2)

3. naloga

Vektorji $[1, 1, 1]^T$, $[1, 0, 1]^T$ in $[1, 1, 0]^T$ tvorijo ortonormirano bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$, opremljenega s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

a) Za vektorja $u = [x, y, z]^T$ in $v = [a, b, c]^T$ izračunaj $\langle u, v \rangle$. Predpis skalarnega produkta ustrezno poenostavi.

b) Poišči enačbo tiste premice v $\mathbb{R}^3$, ki gre skozi točko $(0, 1, 1)$, in je pravokotna na vektorja $[1, -1, 1]^T$ in $[1, 1, 1]^T$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textcircled{3} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu + \nu \\ \lambda + \nu \\ \lambda + \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & \mu & \nu & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \nu & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 0 & \nu & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \mu & 0 & \lambda & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda & 0 & \nu \\ \lambda & \mu & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ \lambda & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \textcircled{4} \quad (\text{ali po } 2 \times \text{ sistem roko!})$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ \lambda & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_0 + y_0 + z_0 \\ x_0 - y_0 \\ x_0 - z_0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \rangle = (-x_0 + y_0 + z_0)(-a + b + c) + (x_0 - y_0)(a - b) + (x_0 - z_0)(a - c) \quad \textcircled{6}$$

$$= 3ax_0 - 2ay_0 - 2az_0 - 2bx_0 + 2by_0 + bz_0 - 2cx_0 + cy_0 + 2cz_0$$

b) Enačba premice: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$, kjer je $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 2

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (-x_0 + y_0 + z_0) \cdot (-1) + (x_0 - y_0) \cdot 2 + (x_0 - z_0) \cdot 0 = 0$$

$$x_0 - y_0 - z_0 + 2x_0 - 2y_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 3x_0 - 3y_0 \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (-x_0 + y_0 + z_0) \cdot (1) + (x_0 - y_0) \cdot 0 + (x_0 - z_0) \cdot 0 = 0 \quad \textcircled{3}$$

$$\Rightarrow x_0 = y_0 + z_0 \Rightarrow z_0 = x_0 - y_0 \Rightarrow x_0 - y_0 = 3x_0 - 3y_0 \Rightarrow x_0 = y_0$$

$$\Rightarrow z_0 = 2x_0 \quad \textcircled{2}$$

Enačba premice: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 2

4. naloga

Normalna matrika $A \in \mathbb{R}^{3,3}$, za katero je $\text{sl } A = 3$ in $\det A = 3$, ima eno lastno vrednost enako 1.

a) Določi vse lastne vrednosti matrike A .

b) Ali je lahko vektor $[1, 1, 2i]^T$ lastni vektor matrike A ?

c) En lastni vektor matrike A je $[1, 1, i\sqrt{2}]^T$. Določi lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda = 1$.

Vse odgovore dobro utemelji!

a) $\lambda_1 = 1$; $\text{sl } A = 3 = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 2$ (3)
 $\det A = 3 \Rightarrow 1 \cdot \lambda_1 \lambda_2 = 3 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 = 3$ (3)
 $\Rightarrow \lambda_1(2 - \lambda_1) = 3$
 $\Rightarrow \lambda_1^2 - 2\lambda_1 + 3 = 0$
 $\lambda_1 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow \lambda_2 = 2 - \lambda_1 = 1 \mp \sqrt{2}i$
 $\Rightarrow \lambda_3 = 1, \lambda_1 = 1 + \sqrt{2}i, \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}i$ (2)

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2i \end{bmatrix}$ ni lastni vektor za A

Če je $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2i \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2i \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = \lambda_1$ ali λ_2 . ker je A realna, je

$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2i \end{bmatrix} = \bar{\lambda} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2i \end{bmatrix}$ (3) in $\bar{\lambda} = \lambda_2$ ali λ_1 .

Taki $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2i \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2i \end{bmatrix}$ pripadata različnim last. vred. ker je A normalna, morata biti perpendikularna, vendar nista. (2) $\rightarrow \times$.

c) Če je $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ i\sqrt{2} \end{bmatrix}$ lastni vektor, potem je $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -i\sqrt{2} \end{bmatrix}$ lastni vektor za konj. last. vredn. lastni vektor za $\lambda_3 = 1$ je na oboj perpendikular. Tak je naprimer $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. (3)