

Matematika 2 (FMT): 1. izpit

22.6.2018

Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = (8x + 5y^2)e^{-x^2-y^2}$ na enotskem krogu $x^2 + y^2 \leq 1$.

Rešitev: Kandidati za ekstreme so stacionarne točke, torej tam kjer sta parcialna odvoda 0:

$$f_x(x, y) = (8 - 2x(8x + 5y^2))e^{-x^2-y^2} = 0, \quad f_y(x, y) = (10y - 2y(8x + 5y^2))e^{-x^2-y^2} = 0$$

Tako dobimo stacionarne točke v notranjosti. Lotimo se najprej $f_y = 0$. Ena možnost je $y = 0$, tedaj iz $f_x = 0$ sledi $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Druga možnost je $8x + 5y^2 = 5$, od koder iz $f_x = 0$ sledi $x = 4/5$, toda za ta x ne obstaja noben ustrezen realen y ki bi rešil $f_y = 0$.

Poiščimo še stacionarne točke na robu. Nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$L(x, y, \lambda) = (8x + 5y^2)e^{-x^2-y^2} - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Iz parcialnih odvodov

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (8 - 2x(8x + 5y^2))e^{-x^2-y^2} - 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = (10y - 2y(8x + 5y^2))e^{-x^2-y^2} - 2\lambda y = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

spet dobimo, da mora biti bodisi $y = 0$ bodisi $\lambda = (5 - (8x + 5y^2))e^{-x^2-y^2}$. V prvem primeru je $x = \pm 1$, v drugem pa $x = 4/5$, $y = \pm 3/5$.

Izračunamo funkcijsko vrednost v vseh kandidatih za ekstreme:

$$f(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = \pm 4\sqrt{2}e^{-1/2} \doteq \pm 3.43, \quad f(\pm 1, 0) = \pm \frac{8}{e} \doteq \pm 2.94, \quad f(\frac{4}{5}, \pm \frac{3}{5}) = \frac{41}{5e} \doteq 3.02$$

in zaključimo, da je $\min = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = -4\sqrt{2}e^{-1/2}$ in $\max = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = 4\sqrt{2}e^{-1/2}$.

2. naloga (25 točk)

Pri $u = v = 0$ izračunaj glavni ukrivljenosti ploskve

$$\begin{aligned}r(u, v) &= (-2e^{2u} - 6e^{-2u} - 4e^{3v} + 9e^{u+v} + 9e^{-u-v}, \\ &\quad 5e^{-u} + 5e^{2v}, \\ &\quad 11e^{2u} + 8e^{-2u} - 3e^{3v} - 12e^{u+v} - 12e^{-u-v}).\end{aligned}$$

Rešitev: V $r(0, 0)$ velja $\vec{r}_u = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ in $\vec{r}_v = \begin{bmatrix} -12 \\ 10 \\ -9 \end{bmatrix}$, torej $E = \vec{r}_u \vec{r}_u = 125$, $F = \vec{r}_u \vec{r}_v = -200$, $G = \vec{r}_v \vec{r}_v = 325$. Izračunamo $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\dots\|} = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} / 25$ ter $\vec{r}_{uu} = \begin{bmatrix} -14 \\ 5 \\ 52 \end{bmatrix}$, $\vec{r}_{uv} = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ -24 \end{bmatrix}$, $\vec{r}_{vv} = \begin{bmatrix} -18 \\ 20 \\ -51 \end{bmatrix}$, torej $L = \vec{r}_{uu} \vec{n} = 50$, $M = \vec{r}_{uv} \vec{n} = -30$, $N = \vec{r}_{vv} \vec{n} = -30$. Izračunamo

$$\det \left(\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} 50 & -30 \\ -30 & -30 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 125 & -200 \\ -200 & -325 \end{bmatrix} \right) = 25(25\lambda^2 - 20\lambda - 96) = 0.$$

To velja pri $\lambda_1 = 12/5$ in $\lambda_2 = -8/5$, kar sta iskani glavni ukrivljenosti.

3. naloga (25 točk)

Reši DE $x^2y' - xy = x^2 + 4$.

Rešitev: Homogeni del: $x^2y' - xy = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x + \ln C \Rightarrow y = Cx$.

Variacija konstante: $y' = C'x + C \Rightarrow x^2(C'x + C) - xCx = x^2 + 4 \Rightarrow x^3C' = x^2 + 4 \Rightarrow C = \int \frac{x^2+4}{x^3} dx = \int (x^{-1} + 4x^{-3}) dx = \ln x - 2x^{-2} + D$.

Končna rešitev: $y = Cx = x \ln x - 2x^{-1} + Dx$.

4. naloga (25 točk)

Izračunaj maso telesa $T = \{(x, y, z); x^2 + 4y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$ z gostoto $\rho(x, y, z) = 16ze^{-x^2-4y^2}$.

Namig: uporabi prilagojene polarne koordinate $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$ za ustrezna a in b .

Rešitev: Masa je enaka:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_{\substack{x^2+4y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq x}} 16z e^{-x^2-4y^2} dx dy dz = \\ &= 16 \iint_{\substack{x^2+4y^2 \leq 1 \\ x \geq 0}} \int_0^x z dz e^{-x^2-4y^2} dx dy = \\ &= 8 \iint_{\substack{x^2+4y^2 \leq 1 \\ x \geq 0}} x^2 e^{-x^2-4y^2} dx dy. \end{aligned}$$

Z uvedbo modificiranih polarnih koordinat $x = r \cos \varphi$, $y = \frac{1}{2}r \sin \varphi$, $\det J = \frac{r}{2}$ dobimo

$$m = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \int_0^1 r^3 e^{-r^2} dr = 2\pi \int_0^1 r^3 e^{-r^2} dr = \pi \int_0^1 t e^{-t} dt = \pi(1 - \frac{2}{e}).$$