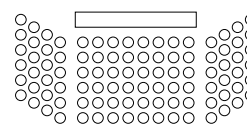


Matematika 2 (FMT, PM): 1. izpit

10.6.2019

Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

Ime in priimek



Sedež (2.01)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

a) (10 točk) Naj bo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva. Pokaži, da za $g(x, y, z) = f(2x - 2y, 2y - 2z, 2z - 2x)$ velja $g_x + g_y + g_z = 0$.

b) (15 točk) Denimo, da je f dvakrat zvezno odvedljiva. V enačbo $f_{xx} - f_{yy} = 0$ vpelji nove koordinate $u(x, y) = x^2 - y^2$ in $v(x, y) = 2xy$. Na koncu morajo nastopati le f, u, v .

Rešitev: (a) $g_x + g_y + g_z = f_x \cdot 2 + f_z \cdot (-2) + f_x \cdot (-2) + f_y \cdot 2 + f_y \cdot (-2) + f_z \cdot 2 = 0$.

(b) Velja

$$\begin{aligned}
 f_{xx} &= (f_x)_x = (f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x)_x \\
 &= f_{uu} \cdot u_x^2 + f_{uv} u_x v_x + f_u \cdot u_{xx} + f_{vu} v_x u_x + f_{vv} \cdot v_x^2 + f_v \cdot v_{xx} \text{ in} \\
 f_{yy} &= (f_y)_y = (f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y)_y \\
 &= f_{uu} \cdot u_y^2 + f_{uv} u_y v_y + f_u \cdot u_{yy} + f_{vu} v_y u_y + f_{vv} \cdot v_y^2 + f_v \cdot v_{yy}.
 \end{aligned}$$

Tako se enačba pretvori v

$$\begin{aligned}
 0 &= f_{xx} - f_{yy} \\
 &= f_{uu}(u_x^2 - u_y^2) + 2f_{uv}(u_x v_x - u_y v_y) + f_{vv}(v_x^2 - v_y^2) + f_u(u_{xx} - u_{yy}) + f_v(v_{xx} - v_{yy}) \\
 &= f_{uu}(4x^2 - 4y^2) + 2f_{uv}(2x2y - 2y2x) + f_{vv}(4y^2 - 4x^2) + f_u(2 + 2) + f_v(0 - 0) \\
 &= 4f_{uu}u + 8f_{uv}v - 4f_{vv}u + 4f_u.
 \end{aligned}$$

2. naloga (25 točk)

Za krivuljo $\vec{r}(t) = (\sin(t), \sin(2t) - \sin(t), \sin(2t) + 2\sin(t))$ izračunaj fleksijsko in torzijsko ukrivljenost. Ali je krivulja ravninska? $\chi_1 = \frac{2\sqrt{11}|2\sin 2t \cos t - \sin t \cos 2t|}{(6\cos^2 t + 8\cos^2 2t + 4\cos t \cos 2t)^{3/2}}$, $\chi_2 = 0$, leži na ravnini

3. naloga (25 točk)

Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $y'' - 14y' + 49y = e^{7x}$.

4. naloga (25 točk)

Izračunaj $\int_T z^2(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, kjer je T telo, podano z $0 \leq x \leq y$ in $0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}$.