

Matematika 2 (FMT): 2. izpit

20.8.2018

Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = (x - 3)y$ na omejenem območju, ki ga določata krivulja $y = x^2 - 8x$ in premica $y = x$.

Rešitev: Na desni je skica definicijskega območja.

Oglišči: $f(0, 0) = 0$, $f(9, 9) = 54$.

Rob $y = x^2 - 8x$: $f(x, x^2 - 8x) = x^3 - 11x^2 + 24x$,

$\frac{d}{dx}f(x, x^2 - 8x) = 3x^2 - 22x + 24 = (3x - 4)(x - 6)$,

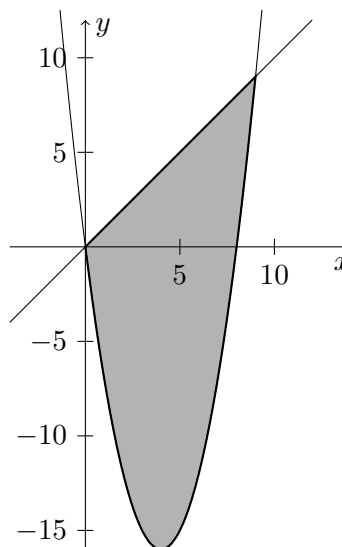
$f\left(\frac{4}{3}, -\frac{80}{9}\right) = \frac{400}{27}$, $f(6, -12) = -36$.

Rob $y = x$: $f(x, x) = x^2 - 3x$,

$\frac{d}{dx}f(x, x) = 2x - 3$, $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$.

Notranjost: $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x - 3$, $f(3, 0) = 0$.

Torej je $\min_D f = f(6, -12) = -36$ in
 $\max_D f = f(9, 9) = 54$.



2. naloga (25 točk)

Dana je momentna krivulja $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$.

a) (15 točk) V vseh točkah izračunaj fleksijsko in torzijsko ukrivljenost.

Rešitev: Velja $\dot{r} = (1, 2t, 3t^2)$, $\ddot{r} = (0, 2, 6t)$, $\ddot{\ddot{r}} = (0, 0, 6)$, $\dot{r} \times \ddot{r} = (6t^2, -6t, 2)$.

Fleksijska $\kappa = \chi_1 = \frac{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|}{\|\dot{r}\|^3} = \sqrt{\frac{36t^4 + 36t^2 + 4}{(9t^4 + 4t^2 + 1)^3}}$ in torzijska $\tau = \chi_2 = \frac{\langle \dot{r} \times \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}} \rangle}{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|^2} = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}$.

b) (10 točk) Pri $t = 2$ zapiši še implicitno enačbo tangente na krivuljo.

Rešitev: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-8}{12}$.

3. naloga (25 točk)

Naj bo $a, b > 0$. Izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x} dx.$$

Kot znano privzemi, da integral obstaja in da lahko odvajáš pod integralskim znakom.

Rešitev: Označimo $F(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ay) - \operatorname{arctg}(by)}{y} dy$ in obravnavajmo a kot parameter, b pa kot konstanto. Z odvajanjem dobimo $F_a(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+a^2x^2} = \frac{1}{a} \arctan(ax)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a}$. Sledi $F(a, b) = \pi \ln a + C(b)$, kjer je C neka funkcija. A ker je $F(b, b) = 0$, mora biti $C(b) = -\pi \ln b$ in

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x} dx = \pi \ln \frac{a}{b}.$$

4. naloga (25 točk)

Reši DE $(x^2+xy)y' + (3xy+y^2) = 0$. Namig: preveri, da je $m(x)=x$ integrirajoči množitelj.

Rešitev: DE oblike $adx + bdy = 0$ je eksaktna, ko je $adx + bdy = df(x, y)$ (in tedaj je rešitev $f(x, y) = C$), torej ko je $a_y = b_x$. V našem primeru je $a_y = 3x + 2y$ in $b_x = 2x + y$, torej ni eksaktna.

Iščemo funkcijo $m = m(x)$, da bo $amdx + bmdy = 0$ eksaktna, torej $(am)_y = a_y m = b_x m + bm' = (bm)_x$ oziroma $\int \frac{a_y - b_x}{b} dx = \int \frac{dm}{m} = \ln m$. To je rešljivo, ko levi integral ne vsebuje y ; v našem primeru je enak $\int \frac{3x + 2y - 2x - y}{x^2 + xy} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$, torej zadošča $m = x$.

Naša pomnožena DE se glasi $(x^3 + x^2y)dy + (3x^2y + xy^2)dx = 0$, in ker velja $a_y = b_x$, je $f = \int adx = \int (3x^2y + xy^2)dx = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + C(y)$. Za določitev C uporabimo $x^3 + x^2y = f_y = x^3 + x^2y + C'$, torej zadošča $C = 0$. Tako je končna rešitev $x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = C$.