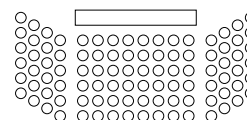


Matematika 2 (FMT): 2. izpit

19.8.2019

Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

Ime in priimek



Sedež (2.01)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = xe^{x+y}$ na območju $D = \{(x, y); x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2\}$.

Rešitev: Na desni je prikazana skica definicijskega območja.

Oglišči: $f(-2, 0) = -2e^{-2} \doteq -0.271$, $f(2, 0) = 2e^2 \doteq 14.78$.

Rob $y = x^2 - 4$, $-2 < x < 2$:

$$f(x, x^2 - 4) = xe^{x^2+x-4},$$

$$\frac{d}{dx}f(x, x^2 - 4) = (1 + x + 2x^2)e^{x^2+x-4},$$

stacionarnih točk ni.

Rob $y = 4 - x^2$, $-2 < x < 2$:

$$f(x, 4 - x^2) = xe^{4+x-x^2},$$

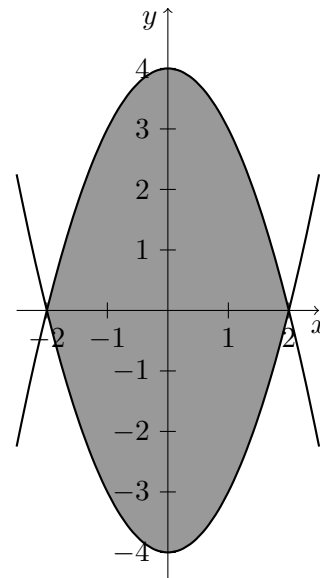
$$\frac{d}{dx}f(x, 4 - x^2) = (1 + x - 2x^2)e^{4+x-x^2}.$$

Obe stacionarni točki $(1, 3)$ in $(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4})$ ležita v definicijskem območju. Velja $f(1, 3) = e^4 \doteq 54.6$ in $f(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4}) = -\frac{1}{2}e^{13/4} \doteq -12.9$.

Notranjost: $f_x(x, y) = (1 + x)e^{x+y}$, $f_y(x, y) = xe^{x+y}$.

Stacionarnih točk v notranjosti ni.

Torej je $\min_D f = f(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4}) = -\frac{1}{2}e^{13/4}$ in $\max_D f = f(1, 3) = e^4$.



2. naloga (25 točk)

Razvij funkcijo $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rešitev: Z upoštevanjem sodosti in lihosti dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \pi dx = \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{(-1)^n}{n}.\end{aligned}$$

Razvita funkcija je torej:

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx) = \frac{\pi}{4} - \sin x + \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin(3x)}{3} + \dots.$$

3. naloga (25 točk)

Poišči vse rešitve Bernoullijeve diferencialne enačbe $\frac{y}{3} + y' = e^x y^4$.

Rešitev: Delimo z y^4 :

$$\frac{1}{3y^3} + \frac{y'}{y^4} = e^x$$

in uvedemo $w = \frac{1}{y^3}$, $w' = -\frac{3y'}{y^4}$. Sledi:

$$\frac{w}{3} - \frac{w'}{3} = e^x.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\begin{aligned} dx - \frac{dw_H}{w_H} &= 0, & x - \ln \frac{w_H}{C} &= 0, & w_H &= C e^x, \\ w &= e^x z, & w' &= e^x z + e^x z', \\ z' &= -3, & z &= C - 3x, \\ w &= (C - 3x)e^x. \end{aligned}$$

Iskana splošna rešitev je torej:

$$y = ((C - 3x)e^x)^{-1/3}$$

skupaj z rešitvijo $y = 0$, ki je limita zgornjih rešitev, ko gre C proti neskončno.

4. naloga (25 točk)

Izračunaj $\int_C \vec{f}$, kjer je krivulja C parametrizirana z $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ za $t \in [0, 1]$ in je vektorsko polje podano z $\vec{f}(x, y, z) = (8x^2yz, 5z, -4xy)$.

Rešitev:
$$\int_C \vec{f} = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} 8t^7 \\ 5t^3 \\ -4t^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (8t^7 + 10t^4 - 12t^5) dt = 1.$$