

Matematika 2 (FMT): 3. izpit

3.9.2018

Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Zapiši razvoj funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & ; -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \text{ ali } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ 0 & ; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ do vključno členov s $\cos(5x)$ in $\sin(5x)$.*Pomoč:* $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$, $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$.**Rešitev:** Ker je funkcija liha, so vsi koeficienti pri kosinusih enaki nič. Vrsta se torej izraža kot sinusna Fourierova vrsta $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, kjer je $b_n = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(2x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} [\cos((n-2)x) - \cos((n+2)x)] dx$. Za vse $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(mx) dx = -\frac{\sin(m\pi/2)}{m},$$

za $m=0$ pa je $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(mx) dx = \frac{\pi}{2}$. Iskani delni razvoj je

$$F_5(x) = -\frac{4}{3\pi} \sin x + \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{4}{5\pi} \sin(3x) + 0 \sin(4x) + \frac{4}{21} \sin(5x).$$

2. naloga (25 točk)

Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = xy + y - y \ln y + 2e^x - e^{2x}$.

Rešitev: Imamo $f_x(x, y) = y + 2e^x - 2e^{2x}$, $f_y(x, y) = x - \ln y$. Edina stacionarna točka je $T(\ln \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Velja $f_{xx}(x, y) = 2e^x - 4e^{2x}$, $f_{xy}(x, y) = 1$, $f_{yy}(x, y) = -\frac{1}{y}$. V edini stacionarni točki je $H = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$. Ker je $\det H = 3 > 0$ in sta diagonalca negativna, je tam lokalni maksimum.

3. naloga (25 točk)

Izračunaj pretok $\int_S \vec{f}$ vektorskega polja $f(x, y, z) = (y, -x, z)$ skozi ploskev S s parametrizacijo $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ za $u \in [0, 1], v \in [0, 2\pi]$.

Rešitev: $\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $\vec{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\sin v, -\cos v, u)$, $\int_S \vec{f} = \int_u \int_v \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \int_{u \in [0, 1]} \int_{v \in [0, 2\pi]} (u \sin v, -u \cos v, v) \cdot (\sin v, -\cos v, u) = \int \int u(1+v) = \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 \cdot (v + \frac{v^2}{2}) \Big|_0^{2\pi} = \pi(1+\pi)$.

4. naloga (25 točk)

Reši DE $y'' + 4y = 3xe^{3x}$.

Rešitev: $\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i$, torej $y_H = A \cos(2x) + B \sin(2x)$. Ko nastavek $y_P = (Cx + D)e^{3x}$ vstavimo v DE, dobimo $(9Cx + 6C + 9D)e^{3x} + 4(Cx + D)e^{3x} = 3xe^{3x}$, torej $C = \frac{3}{13}$, $D = -\frac{18}{169}$. Končna rešitev je $y = y_H + y_P = A \cos(2x) + B \sin(2x) + (\frac{3}{13}x - \frac{18}{169})e^{3x}$.