

Matematika 2 (FMT, PM): 1. kolokvij

4.12.2017

Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Naj bo $M := \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. Funkcija $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ je podana po predpisu:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{če sta } x \text{ in } y \text{ istega predznaka,} \\ |x - y| - 1, & \text{če sta } x \text{ in } y \text{ različnih predznakov.} \end{cases}$$

a) (15 točk) Dokaži, da je d metrika na M .

b) (10 točk) Nariši odprto in zaprto kroglo okoli točke 2 s polmerom 2.

Rešitev: a) Preverimo aksiome metrike:

- Če je $x = y$, sta x in y istega predznaka, torej je $d(x, y) = |x - y| = 0$. Če je $x \neq y$ ter sta x in y istega predznaka, je $d(x, y) = |x - y| > 0$. Če pa sta x in y nasprotnega predznaka, eno izmed števil pripada $(-\infty, -1]$, drugo pa v $[1, \infty)$, torej je $|x - y| \geq 2$ in spet $d(x, y) \geq 1 > 0$.
- Simetrija je očitna.
- Preverimo trikotniško neenakost $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Če so x, y in z vsi istega predznaka, je to trikotniška neenakost za običajno metriko. Če sta x in y različnega, y in z pa istega predznaka, je $d(x, z) = |x - z| - 1$ in $d(x, y) + d(y, z) = |x - y| - 1 + |y - z|$ in neenakost spet sledi iz trikotniške neenakosti za običajno metriko. Podobno velja v primeru, ko sta x in y istega, y in z pa različnega predznaka. Preostane le še primer, ko sta x in z istega predznaka, y pa je različnega predznaka kot x in z . V tem primeru upoštevamo, da je $d(x, y) \geq |x| + 1$ in $d(y, z) \geq |z| + 1$. Po trikotniški neenakosti za absolutno vrednost ocenimo $d(x, z) = |x - z| \leq |x| + |z| \leq d(x, y) + d(y, z)$.

b) Odprta kroglja je interval $[1, 4)$, zaprta kroglja pa je množica $\{-1\} \cup [1, 4]$.

2. naloga (25 točk)

Dana je funkcija $f(x) = 4 - \frac{x + \sin x}{3}$.

a) (5 točk) Dokaži, da ima enačba $f(x) = x$ na realni osi natanko eno rešitev.

b) (10 točk) Poišči interval oblike $[0, a]$, na katerem bo f skrčitev.

c) (10 točk) Reši enačbo $f(x) = x$ na pet decimalk natančno.

Rešitev: a) Oglejmo si funkcijo

$$f(x) - x = 4 - \frac{4x + \sin x}{3}.$$

Ko gre x proti minus neskončno, gre $f(x) - x$ proti neskončno in ko gre x proti neskončno, gre $f(x) - x$ proti minus neskončno. Sledi, da ima funkcija $x \mapsto f(x) - x$ na realni osi vsaj eno rešitev. Nadalje velja

$$f'(x) = -\frac{1 + \cos x}{3},$$

torej za vse $x \in \mathbb{R}$ velja $-\frac{2}{3} \leq f'(x) \leq 0$ in zato $-\frac{5}{3} \leq \frac{d}{dx}(f(x) - x) \leq -1$. Funkcija $x \mapsto f(x) - x$ je torej strogo padajoča, zato ima največ eno ničlo. Sledi, da ima enačba $f(x) = x$ res natanko eno rešitev.

b) Ker za vse $x \in \mathbb{R}$ velja $-\frac{2}{3} \leq f'(x) \leq 0$, bo funkcija na intervalu $[0, a]$ skrčitev, brž ko ga bo preslikala vase. Ker je padajoča, bo slednje res, brž ko bosta $f(0)$ in $f(a)$ na intervalu $[0, a]$. Velja $f(0) = 4$, torej bo $a \geq 4$. Nadalje lahko $f(4) = 4 - \frac{4 + \sin 4}{3}$ omejimo med $4 - \frac{4+1}{3} = \frac{7}{3}$ in $4 - \frac{4-1}{3} = 3$, kar pomeni, da je $f(4) \in [0, 4]$. Sklep: funkcija f je skrčitev na intervalu $[0, 4]$.

c) Za začetni približek $x_1 = 0$ dobimo naslednje zaporedje približkov:

$$0, 4, 2.918934, 2.953414, 2.953172, 2.953173, \dots$$

Ker je funkcija f padajoča, točen rezultat leži med dvema zaporednima približkoma, od koder sledi, da ustrezno zaokrožena rešitev znaša 2.95317.

3. naloga (35 točk)

Dana je funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{za } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0 & \text{za } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$

a) (25 točk) Razvij to funkcijo v trigonometrijsko Fourierovo vrsto.

b) (10 točk) Ali se dobljena vrsta na intervalu $[-\pi, \pi]$ ujema s funkcijo f ? Kaj pa z njenima razvojem v vrsto sinusov in kosinusov na intervalu $[0, \pi]$? Svoj odgovor utemelji!

Rešitev: a) Velja

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x^2 dx = \frac{\pi^2}{12}$$

in za $n = 1, 2, 3, \dots$ velja

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x^2 \cos(nx) dx = \quad (1)$$

$$= \frac{\pi \sin \frac{n\pi}{2}}{2n} + \frac{2 \cos \frac{n\pi}{2}}{n^2} - \frac{4 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^3 \pi}. \quad (2)$$

Ker je funkcija f liha, je:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0.$$

Iskana Fourierova vrsta je torej:

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi^2}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi \sin \frac{n\pi}{2}}{2n} + \frac{2 \cos \frac{n\pi}{2}}{n^2} - \frac{4 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^3 \pi} \right) \cos(nx).$$

b) Dobljena vrsta $\tilde{f}$ se z izvirno funkcijo f ujema povsod razen v $\pm \frac{\pi}{2}$, kjer ni zvezna: tam je funkcija f enaka 0, medtem ko je vsota vrste $\tilde{f}$ enaka $\frac{\pi^2}{8}$.

Ker je funkcija f soda, se vrsta $\tilde{f}$ ujema z razvojem v vrsto iz samih kosinusov. Ker funkcija f ni liha, se vrsta $\tilde{f}$ ne ujema z razvojem v vrsto iz samih sinusov.

4. naloga (25 točk)

Dana je funkcija $f(x, y) = \ln(3 - x) + \ln y$.

a) (15 točk) Nariši njeno definicijsko območje in nivojnice za vrednosti -1 , 0 in 1 .

b) (10 točk) Pokaži, da so za f vsi mešani odvodi tretjega reda, kjer se odvaža dvakrat po x in enkrat po y , enaki, ne glede na vrstni red odvajanja.

Rešitev: **a)** Definicijsko območje funkcije je $(-\infty, 3) \times [0, \infty)$. Nivojnica za vrednost z je krivulja:

$$y = e^{z - \ln(3-x)} = \frac{e^z}{3-x}.$$

b) Ko funkcijo enkrat ali večkrat odvajamo po x , drugi člen odpade in dobimo funkcijo samo spremenljivke x , ko le-to odvajamo po y , pa dobimo nič. Podobno, ko funkcijo enkrat ali večkrat odvajamo po y , prvi člen odpade in dobimo funkcijo samo spremenljivke y , ko le-to odvajamo po x , pa dobimo nič. Sledi:

$$f_{xxy}(x, y) = f_{xyx}(x, y) = f_{yxx}(x, y) = 0.$$