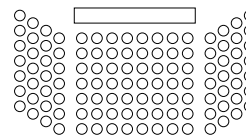


Matematika 2 (FMT, PM): 1. kolokvij

21.11.2018

Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

Ime in priimek



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Dana je funkcija $f(x, y) = x^2 - \frac{1}{y}$.

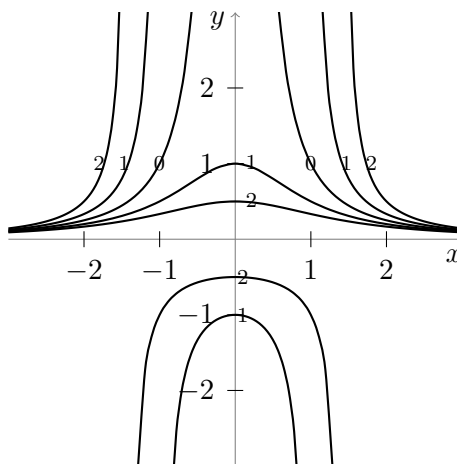
a) (5 točk) Določi definicijsko območje funkcije f .

b) (15 točk) Nariši in označi nivojnice te funkcije za vrednosti $-2, -1, 0, 1, 2$.

c) (5 točk) Se da f zvezno razširiti na celo ravnino $\mathbb{R}^2$?

Rešitev: (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$

(b) Nivojnice so $y = \frac{1}{x^2 - C}$. Slika:



(c) Ne, ker npr. ne obstaja limita $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{y}\right)$.

2. naloga (25 točk)

a) (13 točk) Razvij funkcijo $f(x, y) = e^{x^2 y^2} + \frac{1}{1-x^3 y^3}$ v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0, 0)$.

b) (12 točk) Izračunaj $\frac{\partial^{50} f}{\partial x^{24} \partial y^{26}}(0, 0)$, $\frac{\partial^{50} f}{\partial x^{25} \partial y^{25}}(0, 0)$, $\frac{\partial^{40} f}{\partial x^{20} \partial y^{20}}(0, 0)$, $\frac{\partial^{36} f}{\partial x^{18} \partial y^{18}}(0, 0)$.

Rešitev: (a) Ker je $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ in $\frac{1}{1-z} = \sum_{l=0}^{\infty} z^l$ za $|z| < 1$, velja

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k} y^{2k}}{k!} + \sum_{l=0}^{\infty} x^{3l} y^{3l}.$$

(b) Iz Taylorjeve formule $f(x, y) = \sum_{m,n} \frac{\partial^{m+n} f(0,0)}{\partial x^m \partial y^n} \frac{x^m y^n}{m! n!}$ sledi

$$\frac{\partial^{50} f(0,0)}{\partial x^{24} \partial y^{26}} = 0, \quad \frac{\partial^{50} f(0,0)}{\partial x^{25} \partial y^{25}} = 0, \quad \frac{\partial^{40} f(0,0)}{\partial x^{20} \partial y^{20}} = \frac{20! \cdot 20!}{10!}, \quad \frac{\partial^{36} f(0,0)}{\partial x^{18} \partial y^{18}} = 18! \cdot 18! \left(\frac{1}{9!} + 1\right).$$

3. naloga (30 točk)

Dana je funkcija $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2 - y^2}$.

a) (20 točk) Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije f .

b) (10 točk) Ali so kateri od zgornjih lokalnih ekstremov tudi globalni? Utemelji!

Rešitev: (a) Parcialna odvoda sta $f_x = 2x(1 - x^2 - 2y^2)e^{-x^2 - y^2}$ in $f_y = 2y(2 - x^2 - 2y^2)e^{-x^2 - y^2}$. Iz $f_x = 0$ dobimo $x = 0$ ali $x^2 + 2y^2 = 1$, iz $f_y = 0$ pa $y = 0$ ali $x^2 + 2y^2 = 2$. Pri $x = y = 0$ je $f(0, 0) = 0$, in ker v vseh drugih točkah velja $f(x, y) > 0$, je $(0, 0)$ globalni minimum. Ne more hkrati veljati $x^2 + 2y^2 = 1$ in $x^2 + 2y^2 = 2$. Torej je $x = 0$ in $x^2 + 2y^2 = 2$ (tako dobimo točko $(0, \pm 1)$), ali pa $y = 0$ in $x^2 + 2y^2 = 1$ (tako dobimo točko $(\pm 1, 0)$). Hessova matrika je

$$D^2f = \frac{2}{e^{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} 1-5x^2+2x^4-2y^2+4x^2y^2 & -6xy+2x^3y+4xy^3 \\ -6xy+2x^3y+4xy^3 & 2-x^2-10y^2+2x^2y^2+4y^4 \end{bmatrix}$$

V stacionarnih točkah je to $D^2f_{(0,0)} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ in $D^2f_{(\pm 1,0)} = \frac{2}{e} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ in $D^2f_{(0,\pm 1)} = \frac{2}{e} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$. Zato je $(0, 0)$ lokalni (celo globalni) minimum, $(\pm 1, 0)$ sta sedli, $(0, \pm 1)$ pa lokalna maksimuma. (b) Cela ravnina sicer ni zaprta in omejena množica, toda opazimo, da gre $f(x, y)$ proti nič, ko gre (x, y) proti neskončno, saj če označimo $r := \sqrt{x^2 + y^2}$, velja $|f(x, y)| \leq 2r^2e^{-r^2}$, to pa gre proti nič, ko gre r proti neskončno.

Ker je $f(0, \pm 1) = \frac{2}{e}$, po prejšnjem obstaja r_0 , da je $f(x, y) < \frac{2}{e}$ za vse $r \geq r_0$ (zunaj kroga). Zaprti krog okoli izhodišča s polmerom r_0 pa je zaprt in omejena množica, zato f tam zavzame globalni maksimum. Globalna maksimuma za f na celem $\mathbb{R}^2$ sta torej v $(0, \pm 1)$ z vrednostjo $\frac{2}{e}$.

4. naloga (30 točk)

Dani sta funkcija $f(x, y) = 2x^3 + 3x + 2y^3 + y$ in množica $D = \{(x, y); x^4 + x^2 + 3y^4 + y^2 = 94\}$. Poišči vse globalne minimume in maksimume f na D .

Rešitev: Če je $(x, y) \in D$, je $x^4 \leq 94$ in $y^4 \leq 94$, torej $-\sqrt[4]{94} \leq x \leq \sqrt[4]{94}$ in $-\sqrt[4]{94} \leq y \leq \sqrt[4]{94}$. Torej je D omejena. Nadalje je funkcija $g(x, y) = x^4 + x^2 + 3y^4 + y^2 - 94$ elementarna, torej zvezna, zato je množica D zaprta. Tudi funkcija f je elementarna in zato zvezna. Na zaprtih in omejenih množicah pa vsaka zvezna funkcija doseže minimum in maksimum. Nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$L = 2x^3 + 3x + 2y^3 + y + \lambda(x^4 + x^2 + 3y^4 + y^2 - 94).$$

Velja $\frac{\partial L}{\partial x} = 6x^2 + 3 + \lambda(4x^3 + 2x) = (2x^2 + 1)(3 + 2x\lambda)$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 6y^2 + 1 + \lambda(12y^3 + 2y) = (6y^2 + 1)(1 + 2y\lambda)$ in $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^4 + x^2 + 3y^4 + y^2 - 94$. Izenačimo z nič in iz prvih dveh enačb dobimo $\lambda = \frac{-3}{2x} = \frac{-1}{2y}$, torej $x = 3y$. Vstavimo v tretjo enačbo in dobimo $84y^4 + 10y^2 - 94 = 0$ oziroma $(84y^2 + 94)(y^2 - 1) = 0$, od koder dobimo stacionarni točki $T_1(-3, -1)$ in $T_2(3, 1)$. Vstavimo v funkcijo in dobimo

$$\min_D f = f(-3, -1) = -66 \quad \text{in} \quad \max_D f = f(3, 1) = 66.$$