

Matematika 2 (FMT, PM): 2. kolokvij

22.1.2018

Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

a) (11 točk) Razvij $f(x, y) = \frac{\ln(1-xy^2)}{y^2}$ v Taylorjevo vrsto okoli $(0, 0)$.

b) (14 točk) Izračunaj $\frac{\partial^{41} f}{\partial x^{15} \partial y^{26}}(0, 0)$ in $\frac{\partial^{10} f}{\partial x^4 \partial y^6}(0, 0)$.

Rešitev: a) $\frac{\ln(1-xy^2)}{y^2} = \frac{-1}{y^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xy^2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x^n y^{2n-2}}{n}$

b) Za $f(x, y) = \sum_{k,l} a_{kl} x^k y^l$ je $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(0, 0) = m! \cdot n! \cdot a_{mn}$, torej dobimo 0 (saj $(15, 26)$ ni oblike $(n, 2n-2)$) in $4! \cdot 6! \cdot \frac{-1}{4} = -4320$.

2. naloga (25 točk)

Klasificiraj (lokalni minimum, lokalni maksimum, sedlo) vse kritične točke funkcije

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x y e^{-x^2-y^2}.$$

Rešitev: Odvod funkcije f je

$$D(f)_{(x,y)} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ye^{-x^2-y^2} + xye^{-x^2-y^2}(-2x) \\ xe^{-x^2-y^2} + xye^{-x^2-y^2}(-2y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2} \\ x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} \end{bmatrix}$$

in ta je ničeln natanko tedaj ko je $x = y = 0$ ali $x = \pm\sqrt{2}, y = \pm\sqrt{2}$. Torej ima f pet kritičnih točk: $(0, 0), ((-1)^a \frac{1}{\sqrt{2}}, (-1)^b \frac{1}{\sqrt{2}})$ za $a, b \in \{0, 1\}$. Drugi odvod funkcije f je $D^2(f)_{(x,y)} =$

$$\begin{bmatrix} y(-4x)e^{-x^2-y^2} + y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}(-2x), & (1-2x^2)e^{-x^2-y^2} + y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}(-2y) \\ (1-2x^2)e^{-x^2-y^2} + y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}(-2y), & x(-4y)e^{-x^2-y^2} + x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}(-2y) \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 2xy(2x^2-3)e^{-x^2-y^2}, & (1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} \\ (1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}, & 2xy(2y^2-3)e^{-x^2-y^2} \end{bmatrix}.$$

Ko to evaluiramo v vseh petih kritičnih točkah, dobimo

$$\begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} (-1)^{a+b+1}, & 0 \\ 0, & (-1)^{a+b+1} \end{bmatrix} \frac{2}{e}.$$

Prva matrika ima karakteristični polinom $\lambda^2 - 1$, torej lastni vrednosti $-1, 1$. Druga matrika ima obe lastni vrednosti enaki $(-1)^{a+b+1}$. Izrek pravi, da če je $a \in \mathbb{R}^n$ kritična točka gladke funkcije $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in so vse lastne vrednosti matrike $D^2(f)_a$ neničelne ter vse pozitivne / vse negativne / nekatere pozitivne nekatere negativne, je a lokalni minimum / lokalni maksimum / sedlo. V našem primeru je torej $(0, 0)$ sedlo, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ sta lokalna maksimuma, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ sta lokalna minimuma.

3. naloga (25 točk)

Dana je enačba:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 9)^2 = 45(x^2 + y^2).$$

a) (5 točk) Reši to enačbo na x pri $y = z = 1$.

b) (10 točk) Pokaži, da ima ta enačba v okolici vsake rešitve, kjer je $y = z = 1$, enolično izražavo oblike $x = x(y, z)$.

c) (10 točk) Vzemimo rešitev iz prejšnje točke, pri kateri je $y = z = 1$ in $0 < x < 3$, in izražavo oblike $x = x(y, z)$ v njeni okolici. Izračunaj $\frac{\partial x}{\partial y}$ in $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Rešitev:

a) Enačba dobi obliko $(x^2 + 11)^2 = 45x^2 + 45$ oziroma $x^4 - 23x^2 + 76 = 0$, kar ima 4 rešitve: $\pm 2, \pm\sqrt{19}$.

b) Funkcija $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 9)^2 - 45(x^2 + y^2)$ ima parcialne odvode:

$$F_x(x, y, z) = x(4t - 90), \quad F_y(x, y, z) = y(4t - 90), \quad F_z(x, y, z) = 4tz,$$

kjer je $t = x^2 + y^2 + z^2 + 9$. Pri $y = z = 1$ je bodisi $t = 15$ bodisi $t = 30$, torej v nobenem primeru ni $4t - 90 = 0$, prav tako pa tudi ni $x = 0$, torej tudi F_x ni enak nič. Po izreku o implicitni funkciji se da zato v okolici rešitve res enolično izraziti $x = x(y, z)$.

c) $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y(2, 1, 1)}{F_x(2, 1, 1)} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F_z(2, 1, 1)}{F_x(2, 1, 1)} = 1.$

4. naloga (35 točk)

a) (20 točk) Parametriziraj krivuljo:

$$y = e^z \sin z, \quad x^2 + y^2 = e^{2z}$$

ter pri $z = 0, x > 0$ določi fleksijsko in torzijsko ukrivljenost.

b) (15 točk) Dana je ploskev:

$$\begin{aligned} x &= 8u^2 - 22uv + 5v^2 - 6v, \\ y &= -16u^2 + 68uv - 10v^2 + 3u - 3v, \\ z &= 16u^2 - 65uv + 10v^2 + 3u. \end{aligned}$$

Pri $u = v = 0$ določi Gaussovo ukrivljenost.

Rešitev:

a) Ko y , kot je izražen v prvi enačbi, vstavimo v drugo enačbo, dobimo $x^2 = e^{2z} \cos^2 z$. Dobimo torej dve krivulji:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} e^z \cos z \\ e^z \sin z \\ z \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} -e^z \cos z \\ e^z \sin z \\ z \end{bmatrix}.$$

Pri $z = 0$ in $x > 0$ je seveda relevantna prva krivulja. Odvajamo:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} e^z(\cos z - \sin z) \\ e^z(\sin z + \cos z) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -2e^z \sin z \\ 2e^z \cos z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -2e^z(\sin z + \cos z) \\ 2e^z(\cos z - \sin z) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vstavimo $z = 0$ in dobimo:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nadalje je:

$$\|\dot{\vec{r}}\| = \sqrt{3}, \quad \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = 2\sqrt{2}, \quad [\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}] = 4,$$

od koder končno dobimo:

$$\kappa = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad \tau = \frac{1}{2}.$$

b) Odvajamo in vstavimo $u = v = 0$:

$$\vec{r}_u = \begin{bmatrix} 16u - 22v \\ -32u + 68v + 3 \\ 32u - 65v + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_v = \begin{bmatrix} -22u + 10v - 6 \\ 68u - 20v - 3 \\ -65u + 20v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Od tod izračunamo koeficiente prve fundamentalne forme:

$$E = 18, \quad F = -9, \quad G = 45 \quad \text{in še} \quad \sqrt{EG - F^2} = 27.$$

Nadalje iz drugih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_{uu} = \begin{bmatrix} 16 \\ -32 \\ 32 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{uv} = \begin{bmatrix} -22 \\ 68 \\ -65 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{vv} = \begin{bmatrix} 10 \\ -20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

dobimo še koeficiente druge fundamentalne forme:

$$L = 48, \quad M = -96, \quad N = 30.$$

in Gaussova ukrivljenost je enaka:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{32}{3}.$$