

Matematika 2 (FMT, PM): 2. kolokvij

21.1.2019

Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

$$\text{Izračunaj glavni ukrivljenosti ploskve } \vec{r}(u, v) = \begin{bmatrix} 2e^u - e^v \\ e^u + 3e^v \\ 39(e^u + e^{-u}) - 4e^{uv} - 20(e^v + e^{-v}) \end{bmatrix}$$

pri $u = v = 0$. Klasificiraj točko.**Rešitev:** Iz prvih parcialnih odvodov

$$\vec{r}_u = \begin{bmatrix} 2e^u \\ e^u \\ 39(e^u - e^{-u}) - 4ve^{uv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_v = \begin{bmatrix} -e^v \\ 3e^v \\ -4ue^{uv} - 20(e^v - e^{-v}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo $E = 5$, $F = 1$, $G = 10$, $EG - F^2 = 49$ in $\vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$. Iz drugih parcialnih odvodov

$$\vec{r}_{uu} = \begin{bmatrix} 2e^u \\ e^u \\ 39(e^u + e^{-u}) - 4v^2e^{uv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 78 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{uv} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4(1 + uv)e^{uv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$\vec{r}_{vv} = \begin{bmatrix} -e^v \\ 3e^v \\ -4u^2e^{uv} - 20(e^v + e^{-v}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -40 \end{bmatrix}$$

izračunamo $L = 78$, $M = -4$, $N = -40$. Končno je

$$\det \left(\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 78 - 5\lambda & -4 - \lambda \\ -4 - \lambda & -40 - 10\lambda \end{vmatrix} = 49(\lambda^2 - 12\lambda - 64) = 49(\lambda + 4)(\lambda - 16).$$

Glavni ukrivljenosti sta torej $\lambda_1 = -4$ in $\lambda_2 = 16$. Gre za hiperbolično točko.

2. naloga (30 točk)

a) (15 točk) Pokaži, da se da sistem enačb

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 - z^3 + w^2 + 4 &= 0 \\ 2xy + y^2 - 2z^2 + 3w^4 + 8 &= 0\end{aligned}$$

v neki okolici rešitve $(x, y, z, w) = (2, -1, 2, 1)$ enolično izraziti v obliki $(z, w) = (z(x, y), w(x, y))$. Ali je v tej točki sistem rešljiv tudi v obliki $(x, z) = (x(y, w), z(y, w))$? Kaj pa $(y, w) = (y(x, z), w(x, z))$?

b) (15 točk) V točki $(x, y) = (2, -1)$ izračunaj z_x, z_y, w_x, w_y .

Rešitev: a) Jacobijeva matrika parcialnih odvodov vektorske funkcije:

$$\vec{F}(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 - z^3 + w^2 + 4 \\ 2xy + y^2 - 2z^2 + 3w^4 + 8 \end{bmatrix}$$

je enaka $\begin{bmatrix} 2x & -2y & -3z^2 & 2w \\ 2y & 2x + 2y & -4z & 12w^3 \end{bmatrix}$, kar je v dani točki enako $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -12 & 2 \\ -2 & 2 & -8 & 12 \end{bmatrix}$. Ker so determinante $\begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} = -128$, $\begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = -56$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 20$ vse različne od nič, se da sistem v določeni okolici enolično izraziti v vseh omenjenih oblikah.

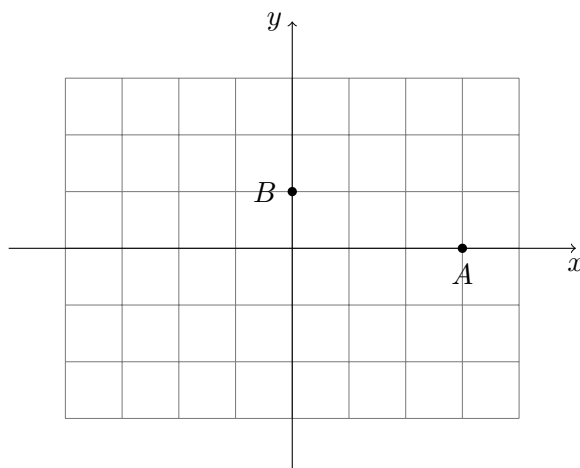
b) Velja

$$\begin{bmatrix} z_x & z_y \\ w_x & w_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -12 & 2 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 14 & -2 \end{bmatrix},$$

torej je $z_x = \frac{13}{32}$, $z_y = \frac{5}{32}$, $w_x = \frac{7}{16}$, $w_y = \frac{-1}{16}$.

3. naloga (25 točk)

Na spodnjo mrežo skiciraj množico točk na $\mathbb{R}^2$, ki so v metriki d_1 enako oddaljene od točk $A(3, 0)$ in $B(0, 1)$.



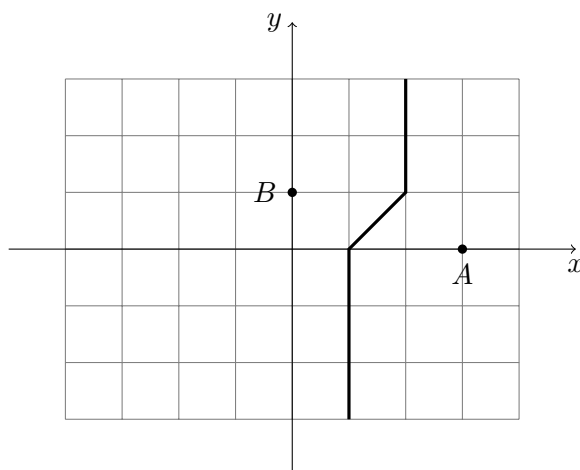
Rešitev: Točke (x, y) iz dane množice zadoščajo enačbi

$$|x - 3| + |y| = |x| + |y - 1|,$$

ki jo preoblikujemo v $f(x) = g(y)$, kjer je:

$$f(x) = |x| - |x - 3| = \begin{cases} -3 & ; x \leq 0 \\ 2x - 3 & ; 0 \leq x \leq 3 \\ 3 & ; x \geq 3, \end{cases}$$
$$g(y) = |y| - |y - 1| = \begin{cases} -1 & ; y \leq 0 \\ 2y - 1 & ; 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & ; y \geq 1. \end{cases}$$

Če je $0 \leq x \leq 3$ in $0 \leq y \leq 1$, mora biti $y = x - 1$. Če je $x < 0$, je $f(x) = -3$, če pa je $x > 3$, je $f(x) = 3$; nobeno od teh števil ni v zalogi vrednosti funkcije g . Če pa je $y < 0$, je $g(y) = -1$; enakost $f(x) = -1$ velja, če je $x = 1$. Podobno, če je $y > 1$, je $g(y) = 1$; enakost $f(x) = 1$ velja, če je $x = 2$. Dobimo spodaj prikazano množico točk:



4. naloga (30 točk)

Naj bo $x_0 = \sqrt{2}$ in $x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}}$. Z uporabo Banachovega skrčitvenega načela pokaži, da zaporedje x_n konvergira k rešitvi enačbe $x^4 - 4x^2 - x + 4 = 0$, ki leži na intervalu $[\sqrt{2}, 2]$. Izračunaj to rešitev na 4 decimalke natančno.

Rešitev: Označimo $f(x) := \sqrt{2 + \sqrt{x}}$. Funkcija f je kompozitum naraščajočih funkcij, zato je naraščajoča. Velja $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2 + \sqrt[4]{2}} > \sqrt{2}$ in $f(2) = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + \sqrt{4}} = 2$. Sledi, da funkcija interval $[\sqrt{2}, 2]$ spet slika v $[\sqrt{2}, 2]$. Nadalje je

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{2x + x\sqrt{x}}},$$

kar je padajoča funkcija, zato za $x \in [\sqrt{2}, 2]$ velja

$$0 \leq f'(x) \leq f'(\sqrt{2}) = \frac{1}{4\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt[4]{2}}} < 0.118 < 1,$$

torej je f na intervalu $[\sqrt{2}, 2]$ skrčitev, zato zaporedje x_n konvergira. Limita seveda prav tako leži na tem intervalu in reši enačbo $x = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$, iz katere sledi $x^2 = 2 + \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = x^2 - 2 \Rightarrow x = (x^2 - 2)^2 \Rightarrow x^4 - 4x^2 - x + 4 = 0$.

Prvih nekaj približkov (na 6 decimalk natančno) je

$$x_0 \doteq 1.414214, \quad x_1 \doteq 1.785835, \quad x_2 \doteq 1.826568, \quad x_3 \doteq 1.830712, \quad x_4 \doteq 1.831130, \quad x_5 \doteq 1.831172.$$

Če z x^* označimo iskano rešitev (fiksno točko), velja

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{q}{1-q} d(x_n, x_{n-1}).$$

Res: $d(x_{n-1}, x^*) \leq d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x^*) \leq d(x_{n-1}, x_n) + qd(x_{n-1}, x^*) \Rightarrow (1-q)d(x_{n-1}, x^*) \leq d(x_{n-1}, x_n) \Rightarrow d(x_n, x^*) \leq qd(x_{n-1}, x^*) \leq \frac{q}{1-q}d(x_{n-1}, x_n)$.

V našem primeru je $|x_5 - x^*| \leq \frac{0.118}{1-0.118}|x_5 - x_4| < 0.000006$, torej je $1.8311655 < x^* < 1.8311785$, kar pomeni, da se rešitev v zahtevani natančnosti glasi $x^* \doteq 1.8311$.