

Matematika 2 (FMT, PM): 3. kolokvij

10.4.2018

Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Reši DE $xy' = x + y + xe^{-y/x}$.

Rešitev: Če delimo z x , dobimo $y' = 1 + y/x + e^{-y/x}$, kar pomeni, da je enačba homogena. S substitucijo $z = y/x$ dobimo $xz' = 1 + e^{-z}$. To je enačba z ločljivima spremenljivkama, saj se da izraziti v obliki $\frac{dz}{1+e^{-z}} = \frac{dx}{x}$ oziroma $\frac{e^z dz}{e^z+1} = \frac{dx}{x}$. Integriramo in dobimo $\ln \frac{1+e^z}{A} = \ln |x|$, torej $1+e^z = A|x|$. A enačba ima pomen za $x \neq 0$ in na vsakem intervalu, ki ne vsebuje ničle, smemo družino $A|x|$ zamenjati z družino Ax . Rešimo na z in dobimo $z = \ln(Ax - 1)$. Izrazimo z y in končno dobimo $y = x \ln(Ax - 1)$.

Konstanta A lahko preteče vsa realna števila razen ničle: za vsak $A \neq 0$ namreč obstaja neizrojen interval, na katerem je $Ax - 1 > 0$, za $A = 0$ pa to ni res.

2. naloga (25 točk)

Reši DE $y' + \frac{y}{x} = \sqrt{y}$.

Rešitev: To je Bernoullijeva DE $y' = f(x)y + g(x)y^r = -\frac{y}{x} + y^{1/2}$. Funkcija $y = 0$ je rešitev te enačbe, za preostale rešitve pa uvedemo $z(x) = y(x)^{1-r} = y^{1/2}$, $z' = (1-r)y^{-r}y'$. Tako se DE prevede na linearno: $\frac{z'}{1-r} = f(x)z + g(x)$ oziroma $2z' = -\frac{z}{x} + 1$. Homogeni del $2z' = -\frac{z}{x}$ ima rešitev $z = C|x|^{-1/2}$, partikularni del pa se reši z variacijo konstante (ki jo je dovolj narediti za $x > 0$, nato pa preveriti, da partikularna rešitev velja za vse x). Dobimo $z = \frac{x}{3} + C|x|^{-1/2}$. Splošna rešitev enačbe je torej $y = \underline{\underline{(\frac{x}{3} + C|x|^{-1/2})^2}}$, $y = 0$ pa je njena ogrinjača.

3. naloga (25 točk)

Poišči splošno rešitev DE $y'' + 9y = f(x)$ za:

a) (5 točk) $f(x) = 0$;

Rešitev: Karakteristična enačba $\lambda^2 + 9 = 0$ ima rešitvi $\lambda = \pm 3i$, torej $y = \underline{\underline{A \cos 3x + B \sin 3x}}$.

b) (10 točk) $f(x) = x$;

Rešitev: Za homogeni del y_H vzamemo rešitev iz prejšnje točke, za partikularni del pa vzamemo nastavek $y_P = Cx + D$. Rešitev je $y = y_H + y_P = \underline{\underline{A \cos 3x + B \sin 3x + \frac{x}{9}}}$.

c) (10 točk) $f(x) = x + \sin(3x)$.

Rešitev: Rešitvi zgornje DE prištejemo partikularno rešitev DE $y'' + 9y = \sin(3x) = \operatorname{Im}(e^{3ix})$. Za $y'' + 9y = e^{3ix}$ je nastavek $y_P = Cxe^{3ix}$, nato pa vzamemo Im od rešitve. Končna rešitev je $y = y_H + y_P = \underline{\underline{A \cos 3x + B \sin 3x + \frac{x}{9} - \frac{x}{6} \cos 3x}}$.

4. naloga (35 točk)

Dana je DE $2y dx - (x + y) dy = 0$.

a) (10 točk) Poišči tak a , da bo enačba postala eksaktna, če jo delimo z $xy + ay^2$.

Rešitev: Velja $\frac{\partial}{\partial y} \frac{2}{x+ay} = -\frac{2a}{(x+ay)^2}$ in $-\frac{\partial}{\partial x} \frac{(x+y)}{xy+ay^2} = \frac{1-a}{(x+ay)^2}$. Izraza se ujemata za $a = -1$; takrat postane enačba eksaktna.

b) (25 točk) Poišči vse rešitve dane enačbe pri začetnih pogojih $y(0) = 0$, $y(0) = -2$ in $y(1) = 1$. Pazi na morebitne rešitve, ki jih izgubimo pri deljenju.

Rešitev: Ko enačbo delimo z $xy - y^2$, dobimo $\frac{2}{x-y} dx - \frac{x+y}{y(x-y)} dy = 0$. Integriramo $\int \frac{2}{x-y} dx = 2 \ln |x-y| + A(y)$ in $-\int \frac{x+y}{y(x-y)} dy = -\int \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{x-y}\right) dy = -\ln |y| + 2 \ln |x-y| + B(x)$. Izraza se ujemata, če je $A(y) = -\ln |y|$ in $B(x) = 0$. Dana DE ima torej splošno rešitev $2 \ln |x-y| - \ln |y| = C$, kar je ekvivalentno $\frac{(x-y)^2}{|y|} = e^C$.

Pri deljenju smo izgubili rešitvi $y = 0$ in $y = x$ (za obe funkciji neposredno preverimo, da sta res rešitvi). Splošno rešitev lahko tako zapišemo v obliki $(x-y)^2 = Dy$, rešitev $y = 0$ pa moramo navesti posebej.

Pri začetnem pogoju $y(0) = 0$ je D lahko kar koli in tudi $y = 0$ izpolnjuje ta začetni pogoj. Dani začetni pogoj torej izpolnjujejo vse rešitve dane enačbe.

Pri začetnem pogoju $y(0) = -2$ je $\overline{D} = -2$. Dobimo $(x-y)^2 + 2y = 0$ oziroma $y^2 - 2(x-1)y + x^2 = 0$ oziroma $y_{1,2} = x-1 \pm \sqrt{1-2x}$. Dani začetni pogoj pa izpolnjuje le rešitev z negativnim korenem, torej je edina rešitev $y = x-1-\sqrt{1-2x}$.

Pri začetnem pogoju $y(1) = 1$ pa pride $D = 0$ in edina rešitev je $y = \underline{x}$.