

Matematika 2 (FMT, PM): 3. kolokvij

18.4.2019

Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)Poišči integrirajoči množitelj za DE $(3x^3+2y)dx - xdy = 0$ in jo reši.

Rešitev: Za DE $gdx + hdy = 0$ poskusimo $\mu = \mu(x)$. Tedaj je $\ln \mu = \int \frac{g_y - h_x}{h} dx = \int \frac{2+1}{-x} dx = -3 \ln x = \ln x^{-3}$, torej pomnožimo z $\mu = x^{-3}$ in dobimo eksaktno DE $(3 + \frac{2y}{x^3})dx - x^{-2}dy = 0$. Integriramo:

$$\int \left(3 + \frac{2y}{x^3}\right) dx = 3x - \frac{y}{x^2} + A(y),$$
$$\int \frac{-1}{x^2} dy = -\frac{y}{x^2} + B(x)$$

in vidimo, da se integrala ujemata pri $A(y) = 0$ in $B(x) = 3x$. Rešitev je torej $3x - \frac{y}{x^2} = C$ oz.

$$y = 3x^3 - Cx^2.$$

Opomba: DE lahko rešimo tudi kot linearno enačbo, saj se preoblikuje v $-xy' + 2y + 3x^3 = 0$.

2. naloga (25 točk)

Pokaži, da ima linearna DE $\sin^2(x)y'' - \sin(2x)y' + (1 + \cos^2 x)y = 0$ rešitev $y_1 = \sin x$, in z njeno pomočjo znižaj red ter poišči tudi drugo neodvisno rešitev te DE. Z determinanto Wronskega preveri, da sta dobljeni rešitvi res neodvisni.

Rešitev: Za y_1 velja $y_1' = \cos x$ in $y_1'' = -\sin x$. Iz računa

$$\begin{aligned}\sin^2 x y_1'' - \sin(2x)y_1' + (1 + \cos^2 x)y_1 \\&= -\sin^3 x - 2\sin x \cos^2 x + (1 + \cos^2 x)\sin x \\&= (1 - \cos^2 x - \sin^2 x)\sin x = 0\end{aligned}$$

vidimo, da je y_1 res rešitev. Za drugo neodvisno rešitev uvedimo

$$y = u \sin x, \quad y' = u' \sin x + u \cos x, \quad y'' = u'' \sin x + 2u' \cos x - u \sin x,$$

vstavimo v enačbo in po ureditvi dobimo

$$\sin^3 x u'' = 0.$$

Funkcija $u = x$ je prav gotovo rešitev te enačbe, od koder dobimo drugo rešitev $y_2 = x \sin x$. Determinanta Wronskega je enaka:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & x \sin x \\ \cos x & \sin x + x \cos x \end{vmatrix} = \sin^2 x,$$

kar je v vseh točkah, ki niso večkratniki števila π , različno od nič, zato sta rešitvi res neodvisni. V večkratnikih števila π pa niso izpolnjeni pogoji eksistenčnega izreka, zato se lahko zgodi, da je determinanta Wronskega tam enaka nič.

3. naloga (30 točk)

Poišči funkcijo, definirano na odprtem intervalu, katere graf je ortogonalen na družino krivulj $y(x^2 + C) + 2 = 0$ in gre skozi točko $(-1, 2)$. Kateri interval je maksimalni možen? Dokazi, da je taka funkcija v neki okolici izhodiščne točke enolično določena.

Rešitev: Odvajamo:

$$y'(x^2 + C) + 2xy = 0,$$

eliminiramo C in dobimo, da krivulje zadoščajo diferencialni enačbi $y' = xy^2$. Ortogonalne trajektorije pa (za $y' \neq 0$) zadoščajo enačbi

$$-\frac{1}{y'} = xy^2 \quad \text{ozioroma} \quad \frac{dx}{x} + y^2 dy = 0,$$

kar se (za $x \neq 0$) zintegrira v

$$\ln|x| + \frac{y^3}{3} = C.$$

Ko vstavimo $x = -1$ in $y = 2$, dobimo $C = 8/3$. Izrazimo y in dobimo

$$y = \sqrt[3]{8 - 3 \ln|x|}.$$

Maksimalni odprt interval, na katerem je definirana desna stran in vsebuje točko -1 , je $(-\infty, 0)$. Dobljena krivulja je ortogonalna trajektorija na dano družino za x na celotnem intervalu $(-\infty, 0)$. Po drugi strani pa je dobljena funkcija klasična rešitev dane DE (tj. zvezno odvedljiva) le na $(-e^{8/3}, 0)$. Ker je tam $x \neq 0$ in $y \neq 0$, lahko DE izrazimo v obliki

$$y' = -\frac{1}{xy^2}.$$

Ker je desna stran zvezna v x in zvezno odvedljiva po y (torej lokalno Lipschitzeva), tam velja lokalni eksistenčni izrek, po kateri je rešitev na $(-e^{8/3}, 0)$ enolično določena. Res pa je, da enoličnost ortogonalne trajektorije velja tudi za $x \in (-\infty, 0)$, a tega ni bilo treba dokazati.

4. naloga (30 točk)

Poišči vse rešitve DE $x^2y'' - 2xy' + 2y = x \ln x$.

Rešitev: Karakteristična enačba $\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = 0$ oz. $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 2$, od koder dobimo rešitev homogenega dela $y_H = C_1x + C_2x^2$. Iz slednje in desne strani dobimo naslednji nastavek za partikularno rešitev:

$$y_P = x(A \ln x + B) \ln x$$

(ker ima enačba pomen le za $x > 0$, ni treba pisati absolutnih vrednosti). Odvajamo:

$$y'_P = A(\ln x)^2 + (2A + B) \ln x + B, \quad y''_P = \frac{2A \ln x + 2A + B}{x}$$

in dobimo

$$x^2y''_P - 2xy'_P + 2y_P = x(2A - B - 2A \ln x).$$

Po izenačitvi koeficientov pride $A = -\frac{1}{2}$ in $B = -1$. Iskana rešitev je torej

$$y = C_1x + C_2x^2 - x \ln x \left(\frac{1}{2} \ln x + 1\right).$$

Znano je, da uporabljeni nastavki za homogeni del enačbe dajo linearno neodvisne rešitve. Če so izpolnjeni pogoji lokalnega eksistenčnega izreka, iz enoličnosti sledi, da za izvirno enačbo res dobimo vse možne klasične rešitve. Ti pogoji pa so za dano enačbo izpolnjeni povsod, kjer ima pomen, to je za $x > 0$. Zato so vse klasične rešitve, definirane na odprtih intervalih, zožitve zgoraj navedenih funkcij.