

Matematika 2 (FMT, PM): 4. kolokvij

19.4.2018

Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Za $x \geq 0$ izračunaj določeni integral $\int_0^\infty \frac{(1 - e^{-xy}) \cos y}{y} dy$.

Kot znano lahko privzameš, da je integral za $x \geq 0$ obstaja in da je zvezen.

Pomoč: $\int e^{ay} \cos(by) dy = \frac{e^{ay}(a \cos(by) + b \sin(by))}{a^2 + b^2} + C$.

Rešitev: Označimo dani integral z $F(x)$ in ga formalno odvajajmo:

$$F'(x) = \int_0^\infty e^{-xy} \cos y dy.$$

Račun je pravilen na poljubnem intervalu (m, ∞) , kjer je $m > 0$, ker lahko za poljubna $x > m$ in $y \geq 0$ ocenimo $|e^{-xy} \cos y| \leq e^{-my}$, integral $\int_0^\infty e^{-my} dy$ pa obstaja. Torej je račun pravilen tudi na intervalu $(0, \infty)$. Z integriranjem po y dobimo:

$$F'(x) = \frac{e^{-xy}(\sin y - x \cos y)}{1 + x^2} \Big|_0^\infty = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Integriramo še po x in dobimo:

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

To velja za vse $x > 0$, zaradi zveznosti pa tudi za vse $x \geq 0$. Očitno je $F(0) = 0$, torej je $C = 0$. Sklep: za vse $x \geq 0$ velja $F(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$.

2. naloga (30 točk)

Dan je dvojni integral $\iint_T \sin(9x^2+4y^2) dx dy$, kjer je $T = \{(x, y); 9x^2+4y^2 \leq 1\}$ notranjost elipse.

a) (10 točk) Zapiši dani integral kot dvakratni integral v običajnih kartezičnih koordinatah: postavi ustrezne meje.

Rešitev: $\int_{-1/3}^{1/3} \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-9x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{1-9x^2}} \sin(9x^2+4y^2) dy dx$ ali $\int_{-1/2}^{1/2} \int_{-\frac{1}{3}\sqrt{1-4y^2}}^{\frac{1}{3}\sqrt{1-4y^2}} \sin(9x^2+4y^2) dx dy$.

b) (20 točk) Izračunaj dani integral (ne nujno kot nadaljevanje prejšnje točke).

Rešitev: Uvedemo popravljene polarne koordinate: $x = \frac{1}{3}r \cos \varphi$, $y = \frac{1}{2}r \sin \varphi$, $\det J = \frac{r}{6}$. Tako je $9x^2+4y^2 \leq 1 \Leftrightarrow r^2 \leq 1$ in zato $\iint_T \sin(9x^2+4y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{6} \sin(r^2) dr = \pi \frac{1-\cos 1}{6}$.

3. naloga (30 točk)

Dan je homogen pokončen stožec s polmerom osnovne ploskve R in višino h .

a) (15 točk) Izračunaj težišče tega stožca.

Rešitev: Postavimo koordinatni sistem tako, da je osnovna ploskev na ravnini xy , središče osnovne ploskve pa v izhodišču. Vrh stožca naj bo točka $(0, 0, h)$. Če označimo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, je stožec določen z neenačbama $z > 0$, $\frac{r}{R} + \frac{z}{h} < 1$.

Zaradi simetrije ima težišče koordinati x in y enaki nič, koordinato z pa izračunamo s pomočjo cilindričnih koordinat:

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{1}{m} \iiint_{\substack{z>0 \\ r/R+z/h<1 \\ r>0 \\ 0<\varphi<2\pi}} \rho r z \, dr \, d\varphi \, dz = \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \int_0^{h(1-r/R)} z \, dz \, r \, dr = \\ &= \frac{3}{\pi R^2 h} 2\pi \int_0^R \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 r \, dr = \\ &= 3h \int_0^1 t(1-t)^2 \, dt = \\ &= \frac{h}{4}. \end{aligned}$$

b) (15 točk) Izračunaj vztrajnostni moment tega stožca okoli osi, ki gre skozi osnovno ploskev in je pravokotna na simetrijsko os. Izrazi ga z maso ter R in h .

Rešitev: Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da gre za os x . Iskani vztrajnostni moment je:

$$\begin{aligned} J_x &= \iiint_{\substack{z>0 \\ r/R+z/h<1 \\ r>0 \\ 0<\varphi<2\pi}} \rho r (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iiint_{\substack{z>0 \\ r/R+z/h<1 \\ r>0 \\ 0<\varphi<2\pi}} \rho r (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) \, dr \, d\varphi \, dz = \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_0^R \int_0^{h(1-r/R)} dz \, r^3 \, dr + \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \int_0^{h(1-r/R)} z^2 \, dz \, r \, dr = \\ &= \pi \rho h \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^3 \, dr + \frac{2\pi \rho h^3}{3} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^3 r \, dr = \\ &= \pi \rho h R^4 \int_0^1 t^3(1-t) \, dt + \frac{2\pi \rho h^3 R^2}{3} \int_0^1 (1-t)^3 t \, dt = \\ &= \pi \rho h R^2 \left(\frac{R^2}{20} + \frac{h^2}{30}\right) = \\ &= m \left(\frac{3R^2}{20} + \frac{h^2}{10}\right). \end{aligned}$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo ploskev S stožec $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$. Za $\vec{g}(x, y, z) = (x, y, z^4)$ izračunaj $\int_S \vec{g}$.

Rešitev: V cilindričnih koordinatah $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$ se stožec izraža kot $\rho = z$, torej ima parametrizacijo $r(\varphi, z) = (z \cos \varphi, z \sin \varphi, z)$. Tako je normala $r_\varphi \times r_z = \begin{vmatrix} i & -j & k \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 1 \\ -z \sin \varphi & z \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = (-z \cos \varphi, -z \sin \varphi, z)$ in zato je ploskovni integral vektorskega polja enak $\int_S \vec{g} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \vec{g}(r) \cdot (r_\varphi \times r_z) dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (z \cos \varphi, z \sin \varphi, z^4) \cdot (-z \cos \varphi, -z \sin \varphi, z) dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (z^5 - z^2) dz = -\frac{\pi}{3}$.

5. naloga (25 točk)

Določi, za katere $a \in \mathbb{R}$ obstaja integral $\int_1^\infty \frac{y^a}{1+y^{3a}} dy$.

Rešitev: Če je $a > 0$, se za velike y integrand obnaša približno tako kot y^{-2a} , zato postavimo domnevo, da integral obstaja za $a > \frac{1}{2}$. Zdaj moramo to še utemeljiti.

Za $a > \frac{1}{2}$ lahko ocenimo $\left| \frac{y^a}{1+y^{3a}} \right| < \frac{1}{y^{2a}}$. Ker integral slednjega obstaja, obstaja tudi prvotni integral.

Za $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ in $y \geq 1$ je tudi $y^{3a} \geq 1$, torej $1 + y^{3a} \leq 2y^{3a}$, torej $\frac{y^a}{1+y^{3a}} \geq \frac{1}{2y^{2a}} \geq 0$. Ker integral slednjega ne obstaja, tudi prvotni integral ne obstaja.

Če pa je $a < 0$, se za velike y integrand obnaša približno tako kot y^a , zato postavimo domnevo, da integral obstaja za $a < -1$. Spet moramo to še utemeljiti.

Za $a < -1$ lahko ocenimo $\left| \frac{y^a}{1+y^{3a}} \right| < y^a$. Ker integral slednjega obstaja, obstaja tudi prvotni integral.

Za $-1 \leq a \leq 0$ in $y \geq 1$ je tudi $y^{3a} \leq 1$, torej $1 + y^{3a} \leq 2$, torej $\frac{y^a}{1+y^{3a}} \geq \frac{y^a}{2} \geq 0$. Ker integral slednjega ne obstaja, tudi prvotni integral ne obstaja.

Sklep: integral obstaja za $a \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$.