

Matematika 2 (FMT): 4. kolokvij

25.4.2019

Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Izračunaj integral $\int_1^e dy \int_{\ln y}^1 \sin(e^x - x) dx$.

Rešitev: $I = \int_0^1 dx \int_1^{e^x} \sin(e^x - x) dy = \int_0^1 \sin(e^x - x)(e^x - 1) dx = \int_1^{e-1} \sin(t) dt = \cos(1) - \cos(e-1)$

2. naloga (30 točk)

Za vse $a \in \mathbb{R}$ izračunaj integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctg(ax^2)}{x^2} dx$.

Korakov v izračunu ni treba utemeljevati. Pomoč: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Rešitev: Označimo $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctg(ax^2)}{x^2} dx$.

Prvi način. Odvajamo:

$$F'(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+a^2x^4} dx.$$

Za $a > 0$ uvedemo substitucijo $t = \sqrt{a}x$ in dobimo

$$F'(a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{a}}.$$

Po integraciji dobimo, da za $a > 0$ velja:

$$F(a) = \pi\sqrt{2a} + C.$$

Zaradi zveznosti to velja tudi za vse $a \geq 0$. Zdaj pa opazimo, da je funkcija F liha; med drugim to pomeni, da je $F(0) = 0$. Od tod brž sledi $C = 0$. Iz lihosti pa zdaj dobimo, da za splošni $a \in \mathbb{R}$ velja:

$$F(a) = \pi\sqrt{2|a|} \operatorname{sgn}(a).$$

Drugi način. Integriramo per partes z $u = \arctg(ax^2)$, $du = \frac{2ax}{1+a^2x^4}$, $dv = \frac{dx}{x^2}$ in $v = -\frac{1}{x}$. Dobimo

$$F(a) = -\frac{1}{x} \arctg(ax^2) \Big|_{x=-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{1+a^2x^4} dx.$$

Prvi člen je enak nič, v drugega pa za $a > 0$ uvedemo substitucijo $t = \sqrt{a}x$ in dobimo

$$F(a) = 2\sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \pi\sqrt{2a},$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

3. naloga (25 točk)

Izračunaj vztrajnostni moment homogene okrogle krožnice z radijem R , ki jo zavrtimo okoli osi, ki gre skozi težišče in leži v ravnini krožnice.

Rešitev: Vzamemo lahko, da krožnica leži v ravnini xy , in jo parametriziramo v obliki $\vec{r} = \begin{bmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Za os lahko vzamemo kar os x . Če dolžinsko gostoto označimo z μ , je

torej vztrajnostni moment enak $J = \mu \int_K (y^2 + z^2) ds$. Iz $\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$, $\|\dot{\vec{r}}\| = R$ dobimo

$$J = \mu \int_0^{2\pi} R^3 \sin^2 \varphi d\varphi = \pi \mu R^3.$$

Opomba. Masa krožnice je enaka $2\pi\mu R$, torej je tudi $J = \frac{1}{2}mR^2$.

4. naloga (30 točk)

Izračunaj ploskovni integral $\iint_S \vec{g}$ za vektorsko polje $\vec{g} = \begin{bmatrix} x^3 + y^2 z \\ x^2 z + y^3 \\ x^3 + y^3 \end{bmatrix}$, kjer je S unija ploskve

$\{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0); 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, orientirane tako, da normala kaže navzdol, in ploskve

$\{(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta); 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, orientirane tako, da normala kaže navzgor.

Namig: kaj povezuje oba dela ploskve?

Rešitev: Oba dela ploskve skupaj tvorita rob zgornje enotske polkrogle, ki jo lahko paramet-

triziramo s sferičnimi koordinatami $\vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{bmatrix}$; $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$.

Opazimo še, da je rob orientiran navzven. Po Gaussovem izreku je iskani integral enak

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{g} = \iiint_D 3(x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 3r^4 \cos^3 \theta d\varphi d\theta dr \\ &= 6\pi \int_0^1 r^4 dr \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{6\pi}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{3\pi}{5} B\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \frac{4\pi}{5}. \end{aligned}$$