

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

z rešitvami

Fizikalna merilna tehnika

2. september 2019

1. Klasificirajte (lokalni minimum, lokalni maksimum, sedlo) vse kritične točke funkcije:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 12x^4 + y^3 - 6xy.$$

- R. Velja $f_x = 48x^3 - 6y$ in $f_y = 3y^2 - 6x$, stacionarni točki sta $T_1(0, 0)$ in $T_2(\frac{1}{2}, 1)$. Nadalje je $f_{xx} = 144x^2$, $f_{xy} = -6$ in $f_{yy} = 6y$. V T_1 je sedlo, v T_2 pa lokalni minimum.

2. Za $x > 0$ poiščite vse rešitve homogene diferencialne enačbe:

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}.$$

- R. Po substituciji $y = xz$, $y' = z + xz'$ in ureditvi dobimo $xz' = \sqrt{1 - z^2}$. Po ločitvi spremenljivk dobimo $\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{dx}{x}$, kar se zintegriira v $\arcsin z = \ln x + C$, torej $z = \sin(\ln x + C)$ oziroma $y = x \sin(\ln x + C)$.

3. Izračunajte težišče zgornje polkrogle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$, ki ima gostoto $\rho(x, y, z) = z$.

- R. Z vpeljavo sferičnih koordinat $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \cos \theta \sin \varphi$, $z = r \sin \theta$, $J = r^2 \cos \theta$ najprej izračunamo maso:

$$m = \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \geq 0}} \rho \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \sin \theta \cos \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = \frac{\pi}{4},$$

nato pa še integral:

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \geq 0}} \rho z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 \sin^2 \theta \cos \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = \frac{2\pi}{15}.$$

Koordinata z iskanega težišča je torej enaka $\frac{8}{15}$, koordinati x in y pa sta enaki nič.

4. Izračunajte ploskovni integral $\iint_S \vec{g}$, kjer je:

$$\vec{g} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

S pa je ploskev, določena s pogojem:

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \quad \text{in} \quad z > \sqrt{3},$$

orientirana navzgor.

R. Če ploskev parametriziramo z $\vec{r} = \begin{bmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ 2\sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$, iz pogoja na z in splošnih pogojev dobimo pogoje $0 \leq \rho < \frac{1}{2}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Odvajamo in izračunamo smer normale, ki jo porodi parametrizacija:

$$\vec{r}_\rho = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ -\frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{2\rho^2 \cos \varphi}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ \frac{2\rho^2 \sin \varphi}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ \rho \end{bmatrix}$$

Ker ima produkt $\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi$ isto smer kot predpisana normala, je iskani integral enak

$$\iint_{\substack{0 \leq \rho < \frac{1}{2} \\ 0 \leq \varphi < 2\pi}} \left\langle \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \frac{2\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2\rho^2 \cos \varphi}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ \frac{2\rho^2 \sin \varphi}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ \rho \end{bmatrix} \right\rangle d\rho d\varphi = \iint_{\substack{0 \leq \rho < \frac{1}{2} \\ 0 \leq \varphi < 2\pi}} \frac{2}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho d\varphi = \frac{2\pi^2}{3}.$$