

Izpit iz Matematike 2

25. maj 2020

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

1. naloga (20 točk)

Določite najmanjšo in največjo vrednost funkcije

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3$$

na območju $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 25\}$.

2. naloga (20 točk)

Naj bo $M = \{0, 1\}^6$ prostor vseh binarnih zaporedij dolžine 6 in naj bo $d(a, b) = \sum_{i=1}^6 |a_i - b_i|$, torej število členov, na katerih se zaporedji a in b razlikujeta.

a) Izračunajte $d((0, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0))$ in $d((1, 0, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 0, 0))$.

b) Pokažite, da je (M, d) metrični prostor.

c) Opišite (oz. zapišite vse elemente) kroglo $K((0, 0, 0, 0, 0, 0), 2)$ ter pokažite, da je krogla $K((0, 0, 0, 0, 0, 0), 5/2)$ hkrati zaprta in odprta množica.

3. naloga (20 točk)

Naj bo

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(ax) \, dx; \quad a \geq 0.$$

a) Pokažite, da velja $J'(a) = -\frac{a}{2} J(a)$.

b) Določite $J(a)$.

Kot znano lahko privzamete, da integral $J(a)$ obstaja in da lahko odvajate pod integralnim znakom.

4. naloga (20 točk)

S pomočjo sferičnih koordinat in Gaussovega izreka izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F} = (0, 0, xyz)$ skozi rob območja:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Namig: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x \, dx = \beta(2, 1/2)$

5. naloga (20 točk)

Za $p, y_0 \in \mathbb{R}$ je dana diferencialna enačba z začetnim pogojem

$$y' = 2xy^p, \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

a) Dokaži, da ima enačba (1) natanko eno rešitev definirano na intervalu $(-\epsilon, \epsilon)$ za nek $\epsilon > 0$, če je izpolnjen vsaj eden od pogojev $p \geq 1$ in $y_0 > 0$. V primeru, ko je $p > 1$ in $y_0 > 0$, poišči rešitev in kak odprt interval $\epsilon > 0$, za katerega je rešitev definirana na intervalu $(-\epsilon, \epsilon)$.

b) V primeru, ko je $p = \frac{1}{2}$ in $y_0 = 0$, poišči vsaj dve rešitvi enačbe (1).