

Drugi kolokvij iz Matematike 2

22. januar 2020

Čas pisanja je 105 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Dana je krivulja s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (\sin(2t), \cos(t))$.

- Zapiši enačbo krivulje v implicitni obliki.
- Nariši krivuljo.
- Izračunaj (fleksijsko) ukrivljenost krivulje v točki $(0, -1)$.

2. naloga (25 točk)

Ploskev S je podana s parametrizacijo $\vec{r}(u, v) = (3v^3 - u^2v + u^2, 3uv^2 + 3u, 2u^2)$.

- Zapiši enačbo normalne premice in tangentne ravnine v točki $(1, 3, 2)$.
- Zapiši prvo fundamentalno formo ploskve S in izračunaj dolžino krivulje, podane z $u(t) = k$; $k \in \mathbb{R}$ in $v(t) = 2t^3$, za $t \in [0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}]$.
- Izračunaj Gaussovo ukrivljenost ploskve S v točki $(1, 3, 2)$.

3. naloga (25 točk)

Na množici $\mathbb{R}^2$ definiramo $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_2 - y_2| + 2 \cdot |x_1 - y_1|$.

- Pokaži, da je d metrika na $\mathbb{R}^2$.
- Izračunaj in skiciraj $K((0, 0), 4)$.
- Pokaži, da je množica $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ odprta v metričnem prostoru $(\mathbb{R}^2, d)$.

4. naloga (25 točk)

Naj bo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$, podana kot

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{bmatrix},$$

kjer je

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= e^{ax+y+z} + x, \\ g(x, y, z) &= x^2 + ax + (y - a) \cdot (z - 1) + 2. \end{aligned}$$

- Izračunaj Jacobijevo matriko preslikave $\vec{F}$.
- Naj bo $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ točka, za katero velja $\vec{F}(x_0, y_0, z_0) = \vec{0}$. Za katera realna števila a se da rešitev sistema $\vec{F}(x, y, z) = \vec{0}$ v okolici točke T_0 , izraziti kot $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \vec{G}(x)$?
- Za $a = 1$ v točki $(-1, 2, -2)$ izračunajte Jacobijevo matriko preslikave $\vec{G}$.