

Tretji in četrti kolokvij iz Matematike 2

25. maj 2020

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

1. naloga (20 točk)

Naj bo

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(ax) \, dx.$$

a) Pokažite, da velja $J'(a) = -\frac{a}{2}J(a)$.

b) Določite $J(a)$.

Kot znano lahko privzamete, da integral $J(a)$ obstaja in da lahko odvajate pod integralnim znakom.

2. naloga (20 točk)

Naj bo

$$J(a, b) = \int_{\mathcal{K}} (x^4 + 2axy^3 + bz) \, dx + (6x^2y^2 - 5y^4) \, dy + x \, dz$$

za $a, b \in \mathbb{R}$, kjer je $\mathcal{K}$ krivulja med točkama $A(1, 0, 1)$ in $B(1, 1, 2)$, podana s parametrizacijo $r(t) = (1, t^2, t^3 + 1)$.

a) Izračunajte integral $J(a, b)$.

b) Določite vrednosti a in b tako, da bo vrednost integrala $J(a, b)$ odvisna samo od začetne in končne točke krivulje.

3. naloga (20 točk)

S pomočjo sferičnih koordinat in Gaussovega izreka izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F} = (0, 0, xyz)$ skozi rob območja:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Namig: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x \, dx = \beta(2, 1/2)$

4. naloga (20 točk)

Za $p, y_0 \in \mathbb{R}$ je dana diferencialna enačba z začetnim pogojem

$$y' = 2xy^p, \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

a) Dokaži, da ima enačba (1) natanko eno rešitev definirano na intervalu $(-\epsilon, \epsilon)$ za nek $\epsilon > 0$, če je izpolnjen vsaj eden od pogojev $p \geq 1$ in $y_0 > 0$. V primeru, ko je $p > 1$ in $y_0 > 0$, poišči rešitev in kak odprt interval $\epsilon > 0$, za katerega je rešitev definirana na intervalu $(-\epsilon, \epsilon)$.

b) V primeru, ko je $p = \frac{1}{2}$ in $y_0 = 0$, poišči vsaj dve rešitvi enačbe (1).

5. naloga (20 točk)

Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$x^2 y'' + xy' - y = \frac{1}{x}.$$