

Predavanja 12. oktober 2020

Ravninsko gibanje

$$|\vec{e}|$$

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$$

$$\dot{\vec{e}} \cdot \vec{e} + \vec{e} \cdot \dot{\vec{e}} = 0$$

$$\dot{\vec{e}} \perp \vec{e}$$

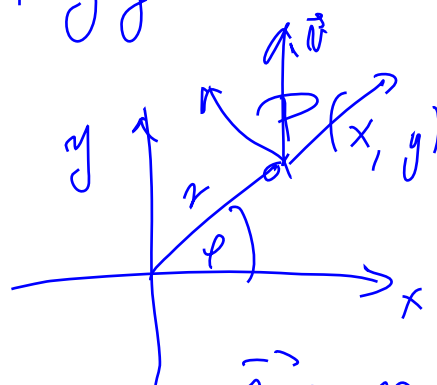
$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}$$

Polarni koordinatni sistem (PKS)

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\vec{e}_r = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$



$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$$

Zapis vektorja hitrosti in pospeška v PKS; radialni pospešek, obodni pospešek.

$$\vec{v} = r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi, \quad \vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\varphi = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (\dot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_r$$

radialna hitrost



obodna hitrost

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} \dot{\varphi} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} (-\vec{e}_r) \dot{\varphi}$$

Primer

Primer: kroženje (=tir leži na krožnici). Enakomerno kroženje, neenakomerno.

$$r = r_0$$

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\ddot{\varphi} = \text{konst.} = \omega_0$$

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$$

$$\vec{v} = r_0 \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = -r_0 \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r + r_0 \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

e.k.

$$\vec{v} = r_0 \omega_0 \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = -r_0 \omega_0^2 \vec{e}_r$$



$$\omega = \dot{\varphi} \quad \alpha = \ddot{\varphi}$$



Kotna hitrost, kotni pospešek.

Koroženje je enakomerno natanko tedaj, ko vektor pospeška kaže proti središču kroženja.

Primer

Ladja pluje s konstantno brzino tako, da njena smer gibanja oklepa s svetilnikom konstantni kot. Določi tir in trajektorijo gibanja.

?

$r = r(\varphi)$

$\vec{u} \cdot \vec{r} = |\vec{u}| |\vec{r}| \cos \rho_0$

$\vec{u} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$

$u_0 = |\vec{u}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}$

$\vec{r} = r \vec{e}_r$

$\vec{u} \cdot \vec{r} = \dot{r} r = u_0 r \cos \rho_0 \Rightarrow \dot{r} = u_0 \cos \rho_0$

$u_0^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = u_0^2 \cos^2 \rho_0 + r^2 \dot{\varphi}^2 \Rightarrow u_0^2 (1 - \cos^2 \rho_0) = r^2 \dot{\varphi}^2$

$u_0^2 \sin^2 \rho_0 = r^2 \dot{\varphi}^2 \Rightarrow u_0 \sin \rho_0 = r \dot{\varphi} = r \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{dr} = r \frac{d\varphi}{dr} u_0 \cos \rho_0$

$\tan \rho_0 \frac{dr}{r} = d\varphi \Rightarrow \int \tan \rho_0 \log r = \varphi + \varphi_0$

Kinematika gibanja po krivulji

Ločna dolžina

Aproksimacija z dolžino poligonske črt, dolžina loka na krivulji $\vec{r} = \vec{r}(t)$ od točke $A = \vec{r}(t_a)$ do točke $B = \vec{r}(t_b)$ je

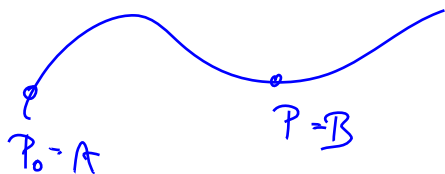
$$s(A, B) = \int_{t_a}^{t_b} |\dot{\vec{r}}| dt = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

$$r(\varphi=0) = r_0$$

$$r = r_0 e^{c \tan \rho_0 \varphi}$$

logaritemske spirale

$$r = (u_0 \cos \rho_0) t + r_0 \quad r(t=0) = r_0$$



$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$s = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} dt$$

$u \geq 0$

Trditev 1. Brzina je absolutna vrednost odvoda poti po času; $v = |\dot{s}|$.

$$s(t) = \int_{t_a}^t v(\tau) d\tau \Rightarrow \dot{s} = \frac{ds}{dt} = v(t) \quad \dot{s} = v$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}(s(t))) = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \dot{s}$$

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \dot{s} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| |\dot{s}| \Rightarrow \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_t \quad \vec{v} = \dot{s} \vec{e}_t$$

$\vec{e}_t$

Vektor $\vec{e}_t = d\vec{r}/ds$ je enotski vektor v smeri tangente na tir.

Vektor hitrosti je tangentialni vektor na tir gibanja in velja $\vec{v} = \dot{s} \cdot \vec{e}_t$.

Ukrivljenost krivulje

$\vec{e}_n$

Ukrivljenost, $d\vec{e}_t/ds = \kappa \vec{e}_n$; krivinski polmer $1/R = \kappa = |d\vec{e}_t/ds|$, vektorju $\vec{e}_n$ pravimo normalni vektor oziroma normala na krivuljo. Ukrivljenost je enaka nič natanko tedaj, ko je krivulja premica.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s} \vec{e}_t) = \ddot{s} \vec{e}_t + \dot{s} \frac{d\vec{e}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \ddot{s} \vec{e}_t + \dot{s}^2 \kappa \vec{e}_n$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{ds} \perp \vec{e}_t$$

$$\left| \frac{d\vec{e}_t}{ds} \right| = \kappa ; \frac{d\vec{e}_t}{ds} = \kappa \vec{e}_n$$

$$|\vec{e}_n| = 1 \text{ normala}$$

Ukrivljenost ravninske krivulje je konstantna natanko tedaj, ko krivulja krožnica.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= -r\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r + r\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi = \text{Na krožnici je } s = r\varphi \\ &= -r \frac{\dot{s}^2}{r^2} \vec{e}_r + r \frac{\ddot{s}}{r} \vec{e}_\varphi = -\frac{1}{r} \dot{s}^2 \vec{e}_r + \ddot{s} \vec{e}_\varphi \quad \varphi = \frac{s}{r} \end{aligned}$$

Dekompozicija vektorja pospeška na tangencialni in normalni pospešek

$$\vec{a} = \ddot{s} \vec{e}_t + \kappa \dot{s}^2 \vec{e}_n$$

Gibanje je premočrtno natanko tedaj, ko sta vektorja hitrosti in pospeška vzporedna.

$\Uparrow$

tir leži na premici

tir je premica $\Leftrightarrow \kappa = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \ddot{s} \vec{e}_t$

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{e}_t$$

Binormala $\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$.

$$\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \alpha \vec{e}_t + \beta \vec{e}_n$$

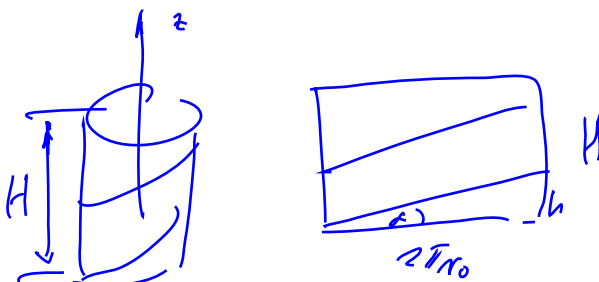
Torzijska ukrivljenost $d\vec{e}_b/ds = -\tau \vec{e}_n$.

$$0 = \frac{d\vec{e}_t}{ds} \times \vec{e}_n + \vec{e}_t \times \frac{d\vec{e}_n}{ds}$$

Krivulja je ravninska natanko takrat, ko je njena torzijska ukrivljenost enaka nič.

Velja: krivulja je do togega pomika natanko določena z normalno in torzijsko ukrivljenostjo.

Primer: Gibanje po vijačnici



$$x = r_0 \cos \varphi, \quad y = r_0 \sin \varphi, \quad z = b \varphi$$

Vrpen na en zavoj: $z = b \cdot 2\pi = h \Rightarrow b = \frac{h}{2\pi}$

$$\tan \alpha = \frac{h}{2\pi r_0} \Rightarrow h = 2\pi r_0 \tan \alpha$$

$$z = r_0 \tan \alpha \varphi$$

Krivočrtne koordinate

Difeomorfizem med kartezičnimi koordinatami $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ in krivočrtnimi $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$.

Krivočrtni bazni vektorji $\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$.

Trditev 2. Vektorji $\vec{g}_i$, $i = 1, 2, 3$ so linearno neodvisni.

Primer

Cilindrične koordinate

Hitrost v krivočrtnih koordinatah

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \vec{g}_i.$$