

Analiza 3 — 3. predavanje

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

Vsebina 3. predavanja

V tem predavanju nadaljujemo s spoznavanjem posebnih živalskih vrst diferencialnih enačb prvega reda in trikov za njihovo reševanje.

- 1 Linearna diferencialna enačba
- 2 Rešitev homogene linearne diferencialne enačbe
- 3 Nehomogena linearna diferencialna enačba
- 4 Izrek o obstoju rešitev linearne enačbe, primeri
- 5 Bernoullijeva enačba
- 6 Ricattijeva enačba
- 7 Splošna logistična enačba

Linearna diferencialna enačba

(Navadna) **linearna diferencialna enačba prvega reda** je oblike

$$y' + a(x)y = b(x),$$

kjer sta $a(x)$ in $b(x)$ dani funkciji na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Operator L , ki vsaki odvedljivi funkciji $y(x)$ na I priredi funkcijo

$$(Ly)(x) = y'(x) + a(x)y(x),$$

se imenuje **linearni diferencialni operator**. Z njegovo pomočjo lahko enačbo zapišemo v preprosti obliki

$$Ly = 0 \text{ (homogena enačba),} \quad Ly = b \text{ (nehomogena enačba).}$$

Operator je linearen v smislu, da za poljubni odvedljivi funkciji $\phi(x)$, $\psi(x)$ na I in konstanti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$L(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha L\phi + \beta L\psi.$$

Odtod sledi, da je vsaka linearna kombinacija rešitev homogene enačbe $Ly = 0$ spet rešitev te enačbe.

Rešitev homogene linearne diferencialne enačbe

$$y' + a(x)y = 0, \quad d \log |y| = \frac{dy}{y} = -a(x)dx.$$

Z integracijo dobimo

$$\log |y| = - \int a(x)dx + c,$$

$$y(x) = y(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}$$

Izrek

Naj bo $a(x)$ zvezna funkcija na intervalu $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$. Tedaj ima za vsak par števil $x_0 \in (\alpha, \omega)$ in $y_0 \in \mathbb{R}$ začetni problem

$$y' + a(x)y = 0, \quad y(x_0) = y_0$$

natanko eno rešitev na intervalu $x \in (\alpha, \omega)$, ki je podana z zgornjo formulo. Množica rešitev je enorazsežen vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$, katerega baza je funkcija $e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}$, $x \in I$.

Nehomogena linearna diferencialna enačba

$$y' + a(x)y = b(x), \quad x \in I.$$

Fiksirajmo neko začetno točko $x_0 \in I$. Rešitev iščemo z nastavkom

$$y(x) = C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} = C(x)e^{-G(x)}, \quad G(x) = \int_{x_0}^x a(t)dt,$$

kjer je $C(x)$ iskana funkcija. Za konstantno vrednost $C = C_0$ je to ravno rešitev homogene linearne enačbe $y' + a(x)y = 0$. Zato tej metodi pravimo **variacija konstante**. Upošteva je $G'(x) = a(x)$ dobimo

$$y'(x) = C'(x)e^{-G(x)} - C(x)e^{-G(x)}G'(x) = C'(x)e^{-G(x)} - C(x)e^{-G(x)}a(x).$$

Vstavimo v enačbo:

$$y'(x) + a(x)y(x) = y'(x) + a(x)C(x)e^{-G(x)} = C'(x)e^{-G(x)} = b(x)$$

$$C'(x) = b(x)e^{G(x)}.$$

Rešitev začetnega problema za nehomogeno linearno enačbo

Odtod dobimo funkcijo $C(x)$ z integracijo:

$$C(x) = \int b(x)e^{G(x)}dx + C_0.$$

Družina rešitev nehomogene enačbe $y' + a(x)y = b(x)$ je torej

$$y(x, C_0) = C_0 e^{-G(x)} + e^{-G(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{G(t)} dt,$$

pri čemer je

$$G(x) = \int_{x_0}^x a(t)dt.$$

Iz $y(x_0, C_0) = C_0$ vidimo, da je rešitev začetnega problema

$$y' + a(x)y = b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

funkcija

$$y(x) = e^{-G(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x b(t)e^{G(t)} dt \right).$$

Izrek o obstoju rešitev linearne enačbe

Dobljeno povzemimo v naslednjem izreku.

Izrek

Naj bosta $a(x)$ in $b(x)$ zvezni funkciji na intervalu $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$. Tedaj ima za vsak par števil $x_0 \in (\alpha, \omega)$ in $y_0 \in \mathbb{R}$ začetni problem

$$y' + a(x)y = b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

natanko eno rešitev na intervalu $x \in (\alpha, \omega)$, ki je podana s formulo

$$y(x) = e^{-G(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x b(t) e^{G(t)} dt \right),$$

kjer je

$$G(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

Splošna rešitev linearne enačbe

Dobljena formula pokaže naslednje, kjer je $Ly = y' + a(x)y$.

Trditev

Splošna rešitev nehomogene linearne enačbe $Ly = b$ je enaka vsoti

$$y = y_h + y_p$$

splošne rešitve prirejene linearne enačbe $Ly_h = 0$, to je $y_h(x) = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}$ za $C \in \mathbb{R}$, in neke (poljubne) partikularne rešitve y_p nehomogene enačbe.

To vidimo tudi direktno. Naj bosta y_p in y poljubni rešitvi nehomogene enačbe:

$$Ly_p = b, \quad Ly = b,$$

Z upoštevanjem linearnosti operatorja L vidimo, da je

$$Ly - Ly_p = L(y - y_p) = 0,$$

torej je razlika $y_h := y - y_p$ rešitev homogene enačbe $Ly_h = 0$.

Odtod sledi, da je splošna (poljubna) rešitev y oblike $y = y_h + y_p$ kot v trditvi.

Primer rešitve nehomogene linearne enačbe

Poiskali bomo splošno rešitev nehomogene linearne enačbe

$$y' + xy = x^3.$$

Sledimo postopku brez uporabe dobljenih formul.

Najprej rešimo prirejeno homogeno enačbo $y' + xy = 0$ z ločitvijo spremenljivk:

$$\frac{dy}{y} = -x dx, \quad \log |y| = -x^2/2 + c.$$

Torej je splošna rešitev homogene enačbe enaka

$$y(x) = Ce^{-x^2/2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Sedaj iščemo rešitev nehomogene enačbe z nastavkom

$$y(x) = C(x)e^{-x^2/2}$$

$$y'(x) = C'(x)e^{-x^2/2} + C(x)e^{-x^2/2}(-x) = C'(x)e^{-x^2/2} - y(x)x.$$

Vstavimo v osnovno enačbo in dobimo

$$y'(x) + xy(x) = C'(x)e^{-x^2/2} = x^3.$$

Nadaljevanje in zaključek primera

Torej je

$$C'(x) = x^3 e^{x^2/2}, \quad C(x) = \int x^3 e^{x^2/2} dx.$$

V integral uvedemo novo spremenljivko $u = x^2/2$, $du = x dx$. Tedaj je

$$x^3 e^{x^2/2} dx = x^2 e^{x^2/2} (x dx) = 2u e^u du.$$

Z integracijo per partes dobimo

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2/2} dx &= \int 2u e^u du = 2 \int u d(e^u) \\ &= 2u e^u - 2 \int e^u du = (2u - 2) e^u + C \\ &= (x^2 - 2) e^{x^2/2} + C. \end{aligned}$$

Splošna rešitev nehomogene enačbe je torej

$$y(x) = \left((x^2 - 2) e^{x^2/2} + C \right) e^{-x^2/2} = x^2 - 2 + C e^{-x^2/2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Bernoullijeva enačba (Jacob Bernoulli, 1654–1705)

Bernoullijeva enačba je oblike

$$y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1.$$

To je nelinearna diferencialna enačba, ker v njej funkcija y nastopa nelinearno. Natančneje, enačba je **kvazilinearna**, ker je linearna v odvodu y' , ne pa tudi v funkciji y .

To enačbo lahko transformiramo v linearno diferencialno enačbo na naslednji način. Predpostavimo, da sta funkciji a in b zvezni na nekem intervalu $I \subset \mathbb{R}$ in je na tem intervalu iskana rešitev $y > 0$. Enačbo pomnožimo z $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$:

$$(1 - \alpha)y^{-\alpha}y' + (1 - \alpha)a(x)y^{1-\alpha} + (1 - \alpha)b(x) = 0.$$

Če uporabimo identiteto

$$(y^{1-\alpha})' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y',$$

dobimo

$$(y^{1-\alpha})' + (1 - \alpha)a(x)y^{1-\alpha} + (1 - \alpha)b(x) = 0.$$

To je linearna diferencialna enačba v spremenljivki $z = y^{1-\alpha}$.

Primer Bernoullijeve enačbe

Enačba

$$y' + 2xy + b(x)y^2 = 0.$$

je Bernoullijeva enačba z $\alpha = 2$. Delimo z y^2 :

$$y^{-2}y' + 2xy^{-1} + b(x) = 0.$$

V spremenljivki $z = y^{-1}$ je

$$z' = -y^{-2}y'$$

in enačba dobi obliko

$$z' = 2xz + b(x).$$

To je nehomogena linearna enačba v z in njena splošna rešitev je

$$z(x) = e^{x^2} \left(c + \int_{x_0}^x e^{-t^2} b(t) dt \right).$$

Ricattijeva enačba (Jacopo Francesco Ricatti, 1676–1754)

Kvazilinearna diferencialna enačba oblike

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

se imenuje Ricattijeva enačba. Enačba je kvadratna v funkciji y in nehomogena. Če je $c \equiv 0$, je enačba Bernoullijeva z $\alpha = 2$.

Razen v posebnih primerih Ricattijeva enačba ni eksplicitno rešljiva. Če pa slučajno poznamo eno njeno rešitev, lahko najdemo vse preostale rešitve z redukcijo na Bernoullijevo enačbo, kot sledi.

Denimo, da je ϕ neka rešitev, torej velja

$$\phi'(x) = a(x)\phi(x)^2 + b(x)\phi(x) + c(x).$$

Če odštejemo to enačbo od prvotne enačbe za y , dobimo

$$y' - \phi' = a(x)(y - \phi(x))(y + \phi(x)) + b(x)(y - \phi(x)).$$

Razlika $u = y - \phi$ torej zadošča Bernoullijevi enačbi

$$u' = a(x)u(u + 2\phi(x)) + b(x)u = a(x)u^2 + (2a(x)\phi(x) + b(x))u.$$

Primer Ricattijeve enačbe

$$y' - x^2 y + y^2 = 2x.$$

Ena rešitev je $\phi(x) = x^2$. Uvedemo novo funkcijo $u = y - x^2$. Tedaj je $y = u + x^2$, $y' = u' + 2x$. Če vstavimo v enačbo, dobimo

$$u' + 2x - x^2(u + x^2) + (u + x^2)^2 = 2x,$$

$$u' + x^2 u + u^2 = 0.$$

To je Bernoullijeva enačba. Če delimo z u^2 in uvedemo funkcijo $z = 1/u$, dobimo

$$u^{-2} u' + x^2 u^{-1} + 1 = 0 \iff z' = x^2 z + 1.$$

Splošna rešitev te linearne enačbe je

$$z(x) = e^{x^3/3} \left(C + \int_{x_0}^x e^{-t^3/3} dt \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Odtod dobimo splošno rešitev prvotne enačbe:

$$y(x) = x^2 + 1/z(x) = x^2 + e^{-x^3/3} \left(C + \int_{x_0}^x e^{-t^3/3} dt \right)^{-1}.$$

Posebna Ricattijeva enačba

Z uvedbo nove neodvisne spremenljivke lahko Ricattijevo enačbo $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ na poljubnem intervalu, kjer je $a(x) \neq 0$, poenostavimo v obliko

$$y' = y^2 + f(x).$$

(Glej Križanič, str. 40.) Primer, kjer je $f(x) = cx^n$ ($c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$) se imenuje **posebna Ricattijeva enačba**:

$$y' = y^2 + cx^n.$$

Če je $n = 0$, je $y' = y^2 + c$ enačba z ločljivima spremenljivkama.

Enačba je eksplicitno rešljiva z integracijami tudi v primeru $n = -2$ (in še v neskončnem zaporedju drugih eksponentov). Uvedemo spremenljivko

$$z = xy, \quad y = z/x, \quad y' = (xz' - z)/x^2.$$

Vstavimo v enačbo, pomnožimo z x^2 in dobimo

$$xz' - z = z^2 + c, \quad \frac{dz}{z^2 + z + c} = \frac{dx}{x}.$$

Splošna logistična enačba

$$y' = y(b(x) - c(x)y) = b(x)y - c(x)y^2.$$

Primer, ko sta b in c konstanti, smo že obravnavali. V variabilnem primeru enačba predstavlja model rasti, kjer sta lokalna stopnja reprodukcije pri majhnih $y > 0$ in zgornja meja variabilni.

To je primer Bernoullijeve enačbe, ki smo jo že obravnavali. Substitucija $y = 1/u$ vodi do enačbe

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{u} \left(b(x) - \frac{c(x)}{u} \right)$$

$$u' + b(x)u = c(x).$$

To je nehomogena linearna enačba, ki jo znamo rešiti:

$$u(x) = e^{-B(x)} \left(u_0 + \int_{x_0}^x c(t) e^{B(t)} dt \right), \quad B(x) = \int_{x_0}^x b(t) dt.$$

$$y(x) = e^{B(x)} \left(y_0^{-1} + \int_{x_0}^x c(t) e^{B(t)} dt \right)^{-1}$$