

Analiza 3 — 5. predavanje

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

Vsebina 5. predavanja

V tem predavanju si bomo ogledali pojem vektorskega polja in prirejenega sistema diferencialnih enačb, osnovne lastnosti toka vektorskega polja (dokazi kasneje) ter nekaj elementarnih primerov.

- 1 Sistemi diferencialnih enačb, dinamični sistemi
- 2 Vektorska polja in njihovi tokovi
- 3 Fazni portret vektorskega polja
- 4 Nekaj preprostih primerov
- 5 Redukcija enačbe višjega reda na sistem enačb prvega reda

Vektorski zapis sistema, fazni prostor

Če označimo z $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$ vektorsko funkcijo s komponentami f_i , lahko zgornji sistem diferencialnih enačb zapišemo v vektorski obliki

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}).$$

Dodamo lahko še začetni pogoj in obravnavamo začetni problem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Vektorsko funkcijo $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ imenujemo **vektorsko polje**. Definirana je na neki domeni $D \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ (**fazni prostor**), vrednosti pa so vektorji v $\mathbb{R}_x^n$.

Vektorsko polje $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, ki je neodvisno od časa t , se imenuje **avtonomno vektorsko polje**; njegov fazni prostor je domena $D \subset \mathbb{R}^n$.

Če razumemo t kot dodatno prostorsko spremenljivko, je neavtonomen sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ ekvivalenten avtonomnemu sistemu

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$$

z avtonomnim vektorskim poljem $\tilde{\mathbf{F}} = (1, \mathbf{F})$ v spremenljivkah $\tilde{\mathbf{x}} = (t, \mathbf{x})$.

Geometrijsko-fizikalna interpretacija

Iz povedanega sledi, da zadošča obravnavati avtonomne sisteme

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Vsaka rešitev $\mathbf{x}(t)$ se imenuje **tokovnica** ali **integralna krivulja** sistema. V času t je hitrostni vektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ enak vrednosti $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ vektorskega polja $\mathbf{F}$ v točki $\mathbf{x}(t)$. Če predstavlja $\mathbf{F}$ hitrostno polje gibanja tekočine, potem vsaka tokovnica opisuje gibanje nekega konkretnega delca v tem polju.

Tir tokovnice na njenem maksimalnem časovnem intervalu je **trajektorija** sistema. Trajektorije so paroma disjunktne in sestavljajo **fazni portret** sistema.

Točka $\mathbf{x}_0$, v kateri je $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = 0$, se imenuje **stacionarna točka** polja $\mathbf{F}$. Prirejena tokovnica je konstanta: $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$.

Primer: Enačba $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ je ekvivalentna sistemu

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}).$$

Primer: Pfaffovo enačbo $a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$ lahko obravnavamo kot sistem

$$\dot{x} = -b(x, y), \quad \dot{y} = a(x, y).$$

Tok vektorskega polja

Naj bo $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ v faznem prostoru. V naslednjem poglavju bomo pokazali, da ima vsak začetni problem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad (t_0, \mathbf{x}_0) \in D$$

natanko eno rešitev

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \phi_{t, t_0}(\mathbf{x}_0)$$

na nekem največjem intervalu

$$I_{t_0, \mathbf{x}_0} = (\alpha(t_0, \mathbf{x}_0), \omega(t_0, \mathbf{x}_0)) \subset \mathbb{R},$$

kjer je

$$-\infty \leq \alpha(t_0, \mathbf{x}_0) < t_0 < \omega(t_0, \mathbf{x}_0) \leq +\infty.$$

$I_{t_0, \mathbf{x}_0}$ se imenuje **interval obstoja rešitve** danega začetnega problema. Pot

$$I_{t_0, \mathbf{x}_0} \ni t \mapsto \phi_{t, t_0}(\mathbf{x}_0) \in D$$

je tokovnica danega dinamičnega sistema (oz. vektorskega polja), ki se pri času $t = t_0$ nahaja v točki $\mathbf{x}_0$.

Lastnosti toka

Preslikava $(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi_{t,t_0}(\mathbf{x})$ se imenuje **tok vektorskega polja** $\mathbf{F}$, ki je inicializiran (umerjen) v času t_0 . Začetni položaj $\mathbf{x}$ pri času t_0 se preslika v končni položaj $\phi_{t,t_0}(\mathbf{x})$ pri času t . Množica

$$\Omega_{t_0} = \{(t, \mathbf{x}) \in D : t \in I_{t_0, \mathbf{x}}\} = \bigcup_{\mathbf{x}} I_{t_0, \mathbf{x}} \times \{\mathbf{x}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

se imenuje **fundamentalna domena** toka; to je maksimalna domena preslikave $(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi_{t,t_0}(\mathbf{x})$.

Tok ima naslednje bistvene lastnosti:

1

$$\phi_{t,t} = \text{Id}, \quad \phi_{t,s} \circ \phi_{s,t_0} = \phi_{t,t_0}.$$

2 Za vsak fiksen t je preslikava

$$\phi_{t,t_0} : \{\mathbf{x} : (t, \mathbf{x}) \in \Omega_{t_0}\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, \phi_{t,t_0}(\mathbf{x})) \in D$$

difeomorfizem na svojo sliko in velja

$$\phi_{t,t_0}^{-1} = \phi_{t_0,t}.$$

Tok avtonomnega vektorskega polja

V primeru avtonomnega vektorskega polja $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ označimo s

$$\phi_t(\mathbf{x}) = \phi_{t,0}(\mathbf{x})$$

tok polja, ki je inicializiran v času $t_0 = 0$. To pomeni, da je

$$\frac{d}{dt}\phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\phi_t(\mathbf{x})), \quad \phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Za fiksno s je očitno $t \mapsto \phi_{t+s}(\mathbf{x})$ tokovnica, ki je v času $t = 0$ v točki $\phi_s(\mathbf{x})$. Ker je tudi $t \mapsto \phi_t(\phi_s(\mathbf{x}))$ tokovnica z isto začetno točko $\phi_s(\mathbf{x})$ pri $t = 0$, iz enoličnosti sledi

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}, \quad \phi_0 = \text{Id}_D, \quad \phi_{-t} = \phi_t^{-1}$$

na maksimalnih domenah danih preslikav. Odtod sledi

$$\phi_{t,t_0} = \phi_t \circ \phi_{t_0}^{-1}.$$

Družina $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ s temi lastnostmi se imenuje **lokalna 1-parametrična grupa difeomorfizmov** na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$. Beseda **lokalna** se nanaša na dejstvo, da je domena posamezne preslikave ϕ_t lahko prava poddomena v D .

Preslikava $\mathbf{x} \mapsto \phi_t(\mathbf{x})$ se imenuje **premik za čas t** .

Infinitezimalni generator, kompletna vektorska polja

Obratno: Če je $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ lokalna 1-parametrična grupa difeomorfizmov na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ in definiramo (avtonomno) vektorsko polje $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ s predpisom

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} \phi_t(\mathbf{x}) \right|_{t=0}, \quad \mathbf{x} \in D,$$

potem je $\phi_t(\mathbf{x})$ ravno tok polja $\mathbf{F}$. To vidimo z odvajanjem identitete $\phi_{t+s}(\mathbf{x}) = \phi_t(\phi_s(\mathbf{x}))$ po t pri $t = 0$:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \phi_t(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{t+s}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(\phi_s(\mathbf{x})) = \mathbf{F}(\phi_s(\mathbf{x})).$$

To vektorsko polje $\mathbf{F}$ se imenuje **infinitezimalni generator** grupe $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Vektorsko polje $\mathbf{F}$ na $D \subset \mathbb{R}^n$ se imenuje **kompletno**, če za vsako točko $\mathbf{x} \in D$ tok $t \mapsto \phi_t(\mathbf{x})$ obstaja za vsak $t \in \mathbb{R}$.

Z drugo besedo, polje $\mathbf{F}$ je kompletno, če (in samo če) je fundamentalna domena toka enaka $\Omega = \mathbb{R} \times D$.

V tem primeru je družina $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ **enoparametrična grupa avtomorfizmov** domene D . (Avtomorfizem je difeomorfizem D na D .)

Primer nekompletnega polja na premici

Vektorsko polje

$$\mathbf{F}(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

določa diferencialno enačbo

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0.$$

Rešitev (smo že izračunali) je

$$x(t) = \phi_t(x_0) = \frac{x_0}{1 - t x_0}.$$

Maksimalni interval obstoja rešitve je

$$I_{x_0} = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{če je } x_0 = 0; \\ (-\infty, 1/x_0), & \text{če je } x_0 > 0; \\ (1/x_0, +\infty), & \text{če je } x_0 < 0. \end{cases}$$

Vektorsko polje $\mathbf{F}(x) = x^2$ na $\mathbb{R}$ torej ni kompletno; edina kompletna tokovnica je tista skozi $0 \in \mathbb{R}$.

Primer: kroženje okrog izhodišča v $\mathbb{R}^2$

Primer 1. Oglejmo si naslednje linearno vektorsko polje na $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x).$$

Prirejeni sistem diferencialnih enačb je

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x.$$

Če pomnožimo prvo enačbo z xdt in drugo z ydt ter seštejemo, dobimo

$$xdx + ydy = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = 0.$$

Funkcija $x^2 + y^2$ je torej prvi integral sistema in trajektorije so krožnice s središčem v $(0, 0)$. Rešitve začetnega sistema dveh enačb dobimo s primerno parametrizacijo krožnic:

$$x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t,$$

Vektorsko polje $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ na $\mathbb{R}^2$ je torej kompletno in njegov tok je

$$\phi_t(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Posplošitev: Hamiltonovo vektorsko polje

Naj bo $E(x, y)$ gladka funkcija na $\mathbb{R}^2$. Vektorsko polje

$$\mathbf{H}_E = \left(-\frac{\partial E}{\partial y}, \frac{\partial E}{\partial x} \right) = (-E_y, E_x)$$

se imenuje **Hamiltonovo polje** z energijsko funkcijo E in

$$\dot{x} = -E_y, \quad \dot{y} = E_x$$

je prirejeni **Hamiltonov sistem**. Za vsako tokovnico $(x(t), y(t))$ je

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = E_x \dot{x} + E_y \dot{y} = E_x(-E_y) + E_y E_x = 0,$$

torej je E prvi integral sistema. Trajektorija skozi (x_0, y_0) leži v nivojnici $E = E(x_0, y_0) = c$. Če je c nekritična vrednost E , je trajektorija povezana komponenta nivojnice $E = c$, ki vsebuje (x_0, y_0) . Vsaka kritična točka funkcije E je stacionarna točka polja $\mathbf{H}_E$. Če je E **funkcija izčrpanja** na $\mathbb{R}^2$, kar pomeni

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} |E(x, y)| = +\infty,$$

potem so njene nivojnice kompaktne in Hamiltonovo polje $\mathbf{H}_E$ je kompletno.

Primer: sedelna (hiperbolična) točka

Kot drugi primer si oglejmo tok naslednjega vektorskega polja na $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{F}(x, y) = (x, -y).$$

Prireden sistem

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y$$

sestoji iz dveh neodvisnih enačb in lahko integriramo vsako posebej:

$$x(t) = x_0 e^t, \quad y(t) = y_0 e^{-t}.$$

Polje je kompletno, prvi integral je $xy = C$, sistem je Hamiltonov, tok je $\phi_t(x, y) = (xe^t, ye^{-t})$, in trajektorija skozi (x_0, y_0) je

- ustrezna veja hiperbole $xy = x_0 y_0$, če je $x_0 y_0 \neq 0$;
- poltrak $\pm x > 0, y = 0$, če je $\pm x_0 > 0$ in $y_0 = 0$, pri čemer gre tok proti $(\pm\infty, 0)$ pri $t \rightarrow +\infty$;
- poltrak $x = 0, \pm y > 0$, če je $x_0 = 0$ in $\pm y_0 > 0$, pri čemer gre tok proti $(0, 0)$ pri $t \rightarrow +\infty$;
- točka $(0, 0)$, če je $x_0 = y_0 = 0$.

Drugi primer z istim prvim integralom

Oglejmo si tok naslednjega vektorskega polja na $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2y, -xy^2) = xy(x, -y).$$

To polje je proporcionalno prejšnjemu s faktorjem proporcionalnosti xy . Odtod sledi, da ima v bistvu enak fazni portret, toda z drugačno parametrizacijo posameznih integralnih krivulj.

Prireden sistem enačb je

$$\dot{x} = x^2y, \quad \dot{y} = -xy^2.$$

Če pomnožimo prvo enačbo z ydt , drugo z xdt ter seštejemo, dobimo

$$ydx + xdy = d(xy) = 0.$$

Funkcija xy je torej prvi integral sistema. Njegove trajektorije so hiperbole $xy = x_0y_0 \neq 0$ ter točke na obeh koordinatnih oseh.

Nadaljevanje primera

Spomnimo:

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2y, -xy^2) = xy(x, -y).$$

Tok polja je enak

$$\phi_t(x, y) = (xe^{txy}, ye^{-txy}) = (a(t, x, y), b(t, x, y)).$$

Preverimo! Najprej opazimo, da velja

$$a(t, x, y)b(t, x, y) = xy$$

in zato

$$\mathbf{F}(\phi_t(x, y)) = xy(a(t, x, y), -b(t, x, y)).$$

Po drugi strani je

$$\dot{\phi}_t(x, y) = (x(xy)e^{txy}, -y(xy)e^{-txy}) = xy(xe^{txy}, -ye^{-txy}).$$

Izraza sta torej enaka.

V primerjavi s tokom polja $(x, -y)$ iz prejšnjega primera vidimo, da je hitrost na tokovnici skozi dano točko (x, y) spremenjena za faktor xy . Ko gre $xy \rightarrow 0$, gre hitrost proti 0 in točke na koordinatnih oseh so stacionarne točke.

Produkt vektorskega polja s prvim integralom

Obravnavani primer lahko posplošimo. Naj bo $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ neko avtonomno vektorsko polje, $\phi_t(\mathbf{x})$ njegov tok in $u(\mathbf{x})$ nek prvi integral sistema. Slednje pomeni, da je za vsak $\mathbf{x}$ funkcija

$$t \mapsto u(\phi_t(\mathbf{x})) = u(\mathbf{x})$$

konstantna (neodvisna od t).

V tem primeri je

$$\psi_t(\mathbf{x}) = \phi_{tu(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$$

tok vektorskega polja

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

To polje ima isto smer kot $\mathbf{F}$, velikost pa je pomnožena z $u(\mathbf{x})$. (Kjer je $u(\mathbf{x}) < 0$, je seveda smer vektorja obrnjena).

To vidimo iz verižnega pravila in predpostavke $u(\mathbf{x}) = u(\phi_t(\mathbf{x}))$ za vsak t :

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_t(\mathbf{x}) &= \dot{\phi}_{tu(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})\mathbf{F}(\phi_{tu(\mathbf{x})}(\mathbf{x})) = u(\phi_{tu(\mathbf{x})}(\mathbf{x}))\mathbf{F}(\phi_{tu(\mathbf{x})}(\mathbf{x})) \\ &= u(\psi_t(\mathbf{x}))\mathbf{F}(\psi_t(\mathbf{x})) \\ &= \tilde{\mathbf{F}}(\psi_t(\mathbf{x})).\end{aligned}$$

Hamiltonova polja na $\mathbb{R}^{2n}$

Hamiltonova vektorska polja obstajajo na vsakem sodo razsežnem evklidskem prostoru $\mathbb{R}^{2n}$. Označimo koordinate z

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n).$$

Vsaki gladki funkciji $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ priredimo njen **Hamiltonian**

$$\mathbf{H}_E = (-E_{\mathbf{y}}, E_{\mathbf{x}}) = (-E_{y_1}, \dots, -E_{y_n}, E_{x_1}, \dots, E_{x_n}).$$

Kot prej vidimo, da je E prvi integral prirejenega **Hamiltonovega sistema**

$$\dot{x}_k = -E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = E_{x_k}, \quad k = 1, \dots, n$$

in vsaka tokovnica $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ leži v ustrezni nivojni ploskvi $E = c$.

V naravnih fizikalnih primerih funkcija E predstavlja energijo sistema in zadnje omenjeno dejstvo se imenuje **zakon o ohranjanju energije**.

Izkaže se, da ima pri $n > 1$ za večino funkcij E tok Hamiltonovega polja $\mathbf{H}_E$ kaotično obnašanje na nivojnih hiperploskvah $E = c$. Konkretno, skoraj vsaka tokovnica skoraj vsakega Hamiltonovega polja je povsod gosta v ustrezni povezani komponenti nivojne ploskve.

Primer: Strižna polja

Vektorsko polje na $\mathbb{R}^2$ oblike

$$\mathbf{F}(x, y) = (0, a(x))$$

se imenuje **strig**. Njegov tok je

$$\phi_t(x, y) = (x, y + ta(x)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vektorsko polje oblike

$$\mathbf{F}(x, y) = (0, a(x)y)$$

je **posplošen strig** in njegov tok je

$$\phi_t(x, y) = \left(x, ye^{ta(x)}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Splošnejši (posplošeni) strig dobimo z istimi formulami v drugih sistemih linearnih koordinat na $\mathbb{R}^2$. Strigi in posplošeni strigi so torej kompletna vektorska polja. Podobno definiramo (posplošene) strige na $\mathbb{R}^n$ za vsak $n > 1$.

Zanimivost: Grupa vseh gladih difeomorfizmov prostora $\mathbb{R}^n$, ki je generirana s strigi in posplošenimi strigi, je gosta v grupi $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ vseh difeomorfizmov v gladki kompaktno-odprti topologiji. To pomeni, da lahko za poljuben $r \in \mathbb{N}$ vsak gladek difeomorfizem $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ aproksimirano v $\mathcal{C}^r$ topologiji na kompaktnih s kompozicijami strigov.

Redukcija enačbe višjega reda na sistem enačb

Navadno diferencialno enačbo n -tega reda

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

lahko prevedemo na sistem n diferencialnih enačb prvega reda tako, da uvedemo spremenljivke

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = \ddot{x}, \quad \dots, \quad x_n = x^{(n-1)}.$$

Tedaj je prvotna enačba ekvivalentna sistemu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \dot{x}_n &= f(t, x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Ker ima ta sistem natanko eno lokalno rešitev za vsako množico začetnih pogojev $x_j(t_0) = x_j^0$ ($j = 1, \dots, n$), ima enačba n -tega reda natanko eno lokalno rešitev s predpisano vrednostjo in prvimi $n - 1$ odvodi v $t = t_0$.

Enačbo drugega reda

$$\ddot{x} + x = 0; \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2$$

z uvedbo spremenljivke $y = \dot{x}$ prevedemo na sistem

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

Ta sistem smo že rešili in njegova splošna rešitev je

$$x(t) = A \sin t + B \cos t, \quad y(t) = -B \sin t + A \cos t; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Dejansko je $\dot{x} = y$ in

$$\ddot{x}(t) = \dot{y}(t) = -A \sin t - B \cos t = -x(t).$$

Z upoštevanjem danih začetnih pogojev pa dobimo partikularno rešitev

$$x(t) = \cos t + 2 \sin t.$$