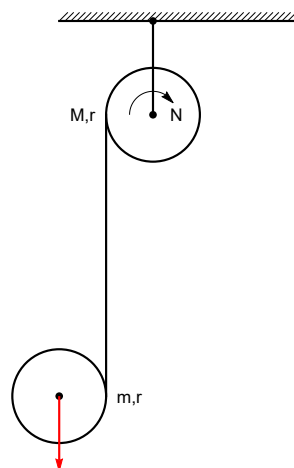
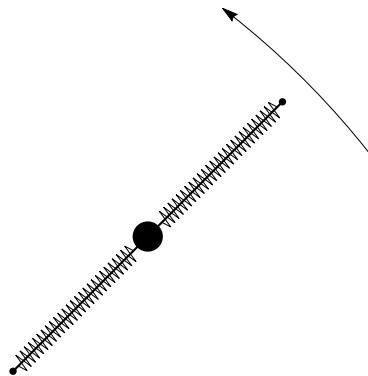


1. izpit iz Mehanike

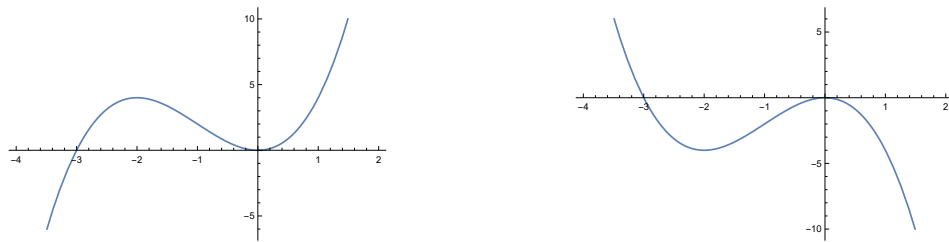
5. februar 2020

- Materialna točka z maso m se giblje premočrtno pod vplivom potenciala $U = \alpha x^2 + \beta x^3$, $\alpha\beta > 0$.
 - Kvalitativno obravnavaj možna gibanja in poišči ravnovesne lege.
 - Ali je gibanje za primer $\alpha = a\beta$ pri energiji $2\beta a^3$, $a > 0$ omejeno?
 - Določi periodo majhnega nihanja okoli ravnovesne lege.
- Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po tiru $r(\varphi) = a \cos^2(\varphi/2)$, $a > 0$.
 - Določi silo. Namig: sila je sorazmerna r^{-4} .
 - Izračunaj efektivni potencial in kvalitativno obravnavaj možna gibanja. Obravnavaj stabilnost pripadajočega krožnega tira.
 - Izračunaj energijo danega tira.
- Po vodilu dolžine $2a$, ki enakomerno kroži s kotno hitrostjo ω se brez trenja giblje materialna točka z maso m , ki je pripeta z dvema enakima vzmetema, tako kot kaže skica. Koeficient vzmeti je k , njegova neraztegnjena dolžina pa a .
 - Zapiši enačbe gibanja v relativnem koordinatnem sistemu, ki se vrti hkrati z vodilom.
 - Določi pogoj na koeficient vzmeti k , da bo na vodilu obstajala ravnovesna lega. Ali je stabilna?
 - Določi maksimalno kotno hitrost ω , če se vzmet lahko stisne za največ $a/2$.
- Na valj z maso M , glej skico, je navita vrstica na katero je obešen jojo z maso m , na valj pa deluje navor N_0 , ki navija vrstico.
 - Zapiši enačbe gibanja.
 - Določi kinematično vez. Nasvet, preveri pravilnost kinematične vezi na primeru, ko se zgornji/spodnji valj ne vrti.
 - Za primer $M = m$ določi gibanje jojoja.



Rešitve

1. (a) Koeficienta α in β imata enak predznak. Če sta pozitivna, je $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = \infty$, če sta negativna pa $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = -\infty$. Poiščimo lokalne ekstreme potenciala. Velja $U' = 2\alpha x + 3\beta x^2$. Stacionarni točki potenciala sta potem $x_1 = 0$ in $x_2 = -2\alpha/3\beta$. Drugi odvod $U'' = 2\alpha + 6\beta x$ ima vrednosti $U(x_1) = 2\alpha$ in $U(x_2) = -2\alpha$. Ravnoesni legi sta tako x_1 in x_2 . Če je $\alpha > 0$ je x_1 stabilna, x_2 pa nestabilna. Pri negativni α se vlogi zamenjata. Vrednosti ekstremov sta $U(x_1) = 0$ in $U(x_2) = \frac{4\alpha^3}{27\beta^2}$. Če je $\alpha > 0$ energija E_0 na intervalu $[0, \frac{4\alpha^3}{27\beta^2}]$ dopušča omejeno gibanje, za $\alpha < 0$ pa na intervalu $[\frac{4\alpha^3}{27\beta^2}, 0]$.



Slika 1: Potencial $U(x)$: levo $\alpha = 3$, $\beta = 1$, desno $\alpha = -3$, $\beta = -1$.

- (b) Naj bo $\alpha = a\beta$. Potem je $\frac{4\alpha^3}{27\beta^2} = \frac{4a^3\beta}{27}$. Ker je

$$|2\beta a^3| > \left| \frac{4a^3\beta}{27} \right|,$$

je gibanje pri energiji $E_0 = 2a^3\beta$ neomejeno.

- (c) Harmonična aproksimacija periode nihanja v okolici stabilne ravnoesne lege je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{|2\alpha|}}.$$

2. (a) Uporabimo Binetovo enačbo

$$a_r = -C_0^2 u^2 (u + u''),$$

kje je $u = 1/r$. Izračunajmo

$$u' = \frac{1}{a} \sin \frac{\varphi}{2} \cos^{-3} \frac{\varphi}{2}$$

in

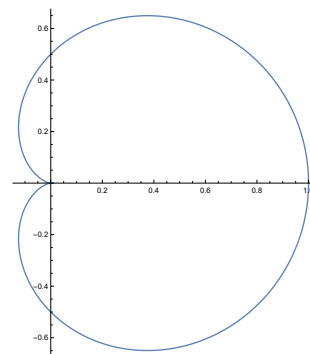
$$u'' = \frac{3}{2a} \cos^{-3} \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{a} \cos^{-2} \frac{\varphi}{2} = \frac{3a}{2} r^{-2} - r^{-1}.$$

Potem je

$$a_r = -\frac{3C_0^2 a}{2r^4}.$$

Sila je tako enaka

$$\vec{F} = m a_r \vec{e}_r = -\frac{3C_0^2 m a}{2r^4} \vec{e}_r.$$



(b) Potencial sile je

$$U = - \int F dr = - \frac{aC_0^2 m}{2r^3} = - \frac{al^2}{2mr^3}.$$

Efektivni potencial je tako

$$U_{\text{ef}} = \frac{l^2}{2mr^2} + U = \frac{l^2}{2mr^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right).$$

Pri $r \rightarrow 0$ je $U_{\text{ef}} \rightarrow -\infty$, pri $r \rightarrow \infty$ pa od zgoraj $U_{\text{ef}} \rightarrow 0$. Efektivni potencial ima globalni maksimum ko je $U'_{\text{ef}} = 0$, to je pri $r_0 = 3a/2$. Ker je to maksimu, je krožni tir $r = r_0$ nestabilen.

(c) Izračunajmo še energijo tira $E_0 = T + U_{\text{ef}}$. Kinetična energija je

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}m \left(\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \right) \dot{\varphi}^2.$$

Upoštevajmo, da je ploščinska hitrost konstantna. Potem

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{l^2}{m^2 r^4}.$$

Vstavimo to v izraz za energijo. Tako dobimo

$$T = \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{l^2 r'^2}{2mr^4} = \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{l^2 u'^2}{2m},$$

kjer smo upoštevali, da je $u' = r' r^{-2}$. Izračunajmo še

$$u'^2 = \frac{1}{a^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^{-6} \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{r^3} - \frac{1}{r^2}.$$

Energija je tako

$$E_0 = \frac{l^2}{mr^2} - \frac{al^2}{2mr^3} + \frac{l^2}{2m} \left(\frac{a}{r^3} - \frac{1}{r^2} \right) = 0.$$

3. (a) Označimo z $\vec{e}_1$ bazni vektor relativnega koordinatnega sistema v smeri vodila. Potem je $\vec{\zeta} = \zeta \vec{e}_1$. Vektor kotne hitrosti je $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$, na točko pa deluje sila vezi $\vec{S} = S \vec{e}_2$ in sili vzmeti $\vec{F}$. Sili vzmeti sta

$$\vec{F}_1 = -k(\zeta - a)\vec{e}_1, \quad \vec{F}_2 = -k(\zeta - a)\vec{e}_1.$$

Potem je $\vec{F} = -2k(\zeta - a)\vec{e}_1$. Newtonova enačba v RKS je

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F} + \vec{S} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} = \vec{F} + \vec{S} + m\omega^2 \vec{\zeta} \vec{e}_1 - 2m\omega \dot{\zeta} \vec{e}_2$$

oziroma po komponentah

$$\begin{aligned} m\ddot{\zeta} &= -2k(\zeta - a) + m\omega^2 \zeta, \\ 0 &= S - 2m\omega \dot{\zeta}. \end{aligned}$$

(b) V ravnovesni legi je $\ddot{\zeta} = 0$. Potem $0 = -2k(\zeta - a) + m\omega^2 \zeta$. Rešitev enačbe je

$$\zeta_0 = \frac{2ka}{2k - m\omega^2}.$$

Pogoj, da obstaja ravnovesna lega na vodilu je $0 \leq \zeta_0 \leq 2a$. Potem mora veljati $k > m\omega^2$. Ravnovesna lega je očitno stabilna. Gibanje v smeri osi ζ ima potencial

$$U = \frac{1}{2}(m\omega^2 - 2k)\zeta^2 + 2ka\zeta,$$

ki ima v ζ_0 stabilno ravnovesno lego.

- (c) Za koliko se vzmet lahko stisne je odvisno od začetne hitrosti gibanja v smeri ζ . Iščemo tako vrednost kotne hitrosti, da bo obstajala začetna brzina, da se vzmet ne bo stisnila za več kot $a/2$. Najmanjša začetna brzina je 0. Pripadajoča dopusta ravnovesna lega pa je $\zeta = 3a/2$. Potem iskano maksimalno kotno hitrost dobimo iz enačbe

$$0 = -2k(\zeta - a) + m\omega^2\zeta$$

pri $\zeta = 3a/2$. Potem je $\omega = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$.

4. (a) Označimo z x razdaljo središča spodnjega valja od stropa in z S_1 silo vrvice tako kot kaže skica. Enačbe gibanja so

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - S_1, \\ \frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_1 &= rS_1, \\ \frac{1}{2}Mr^2\ddot{\varphi}_2 &= rS_1 - N_0. \end{aligned}$$

Tu smo z φ_1 zapisali kot rotacije spodnjega valja, z φ_2 pa zgornjega.

- (b) Kinematična vez je $\dot{x} = r\dot{\varphi}_1 + r\dot{\varphi}_2$.
(c) Pri $M = m$ po krajšem računu dobimo

$$\ddot{x} = \frac{4g}{5} - \frac{2N_0}{5mr}.$$

Pri navoru $N_0 = 2rmg$ spodnji valj miruje.

