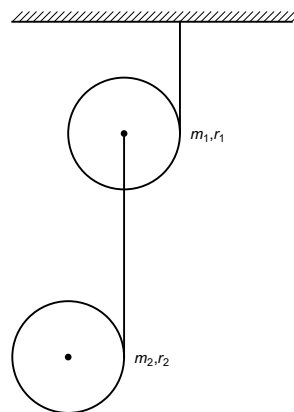


2. izpit iz Mehanike

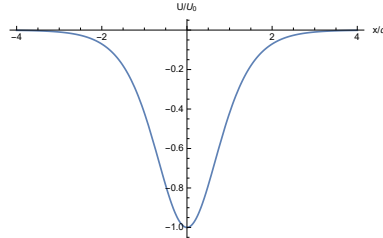
6. julij 2020

1. Materialna točka z maso m se giblje premočrtno pod vplivom potenciala $U = -U_0/\cosh^2 \alpha x$, $U_0 > 0$, $\alpha > 0$.
 - (a) Kvalitativno obravnavaj možna gibanja in poišči ravnovesne lege.
 - (b) Za omejeno gibanje poišči harmonično aproksimacijo periode.
 - (c) Izračunaj periodo.
2. Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po tiru $r(\varphi) = a^2\varphi^4$.
 - (a) Določi silo.
 - (b) Izračunaj efektivni potencial in kvalitativno obravnavaj možna gibanja.
 - (c) Točka iz položaja $\varphi = 2\pi$ pade v center sile v času T . Izračunaj pripadajočo plosčinsko hitrost.
3. Po ravnini, ki enakomerno kroži s kotno hitrostjo ω okrog osi o je brez trenja gibljiva materialna točka z maso m . Os o seka ravnino pod kotom α .
 - (a) Zapiši enačbe gibanja v relativnem koordinatnem sistemu, ki se vrti hkrati z ravnino.
 - (b) Naj se ravnina vrti počasi. Zanemari vpliv centrifugalne sile ter zapiši poenostavljene enačbe gibanja.
 - (c) Reši poenostavljene enačbe gibanja za primer, ko je točka v začetnem trenutku na osi o .
4. Na jojo z maso m_1 , je pripet drugi jojo z maso m_2 , glej skico.
 - (a) Zapiši enačbe gibanja.
 - (b) Določi kinematično vez.
 - (c) Določi gibanje obeh valjev.



Rešitve

1. (a) S slike potenciala vidimo, da je gibanje omejeno za $E_0 \in (U_0, 0)$ in neomejeno za $E_0 \geq 0$. Vrednost $E_0 = -U_0$ ustreza stabilni ravnovesni legi.



Slika 1: Graf potenciala $U(x)$.

- (b) Harmonična aproksimacija periode je

$$\hat{T} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}},$$

kjer je x_0 stabilni ravnovesni položaj. Direkti račun hitro pokaže, da je $U''(x=0) = 2\alpha^2 U_0$. Potem je

$$\hat{T} = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{U_0}}.$$

- (c) Perioda gibanja je

$$T = \sqrt{2m} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}},$$

kjer je $U(\pm a) = E_0$. Izračunajmo

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{2m} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U_0 \cosh^{-2} \alpha x}} \\ &= \sqrt{\frac{2m}{-E_0}} \int_{-a}^a \frac{\cosh \alpha x \, dx}{\sqrt{\cosh^2 \alpha x + U_0/E_0}}. \end{aligned}$$

Vstavimo novo spremenljivko $u = \sinh \alpha x$. Potem je

$$T = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{-E_0}} \int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} \frac{du}{\sqrt{1 + U_0/E_0 - u^2}}.$$

Pod korenem je kvadratna funkcija z vodilnim koeficientom -1 , ki je enaka nič na krajiščih. Integral je tako enak π in

$$T = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{-E_0}}.$$

Vidimo, da se harmonična aproksimacija ujema s pravo vrednostjo v limiti $E_0 \rightarrow -U_0$.

2. (a) Silo dobimo s pomočjo Binetove formule. Pišimo $u = 1/r = 1/a^2\varphi^4$. Potem je $u' = -4/a^2\varphi^5$ in

$$u'' = \frac{20}{a^2\varphi^6} = \frac{20a}{r\sqrt{r}}.$$

Tako je

$$\vec{F} = m\vec{a} = ma_r\vec{e}_r = -mC_0^2 \left(\frac{1}{r^3} + \frac{20a}{r^{7/2}} \right) \vec{e}_r.$$

- (b) Potencial je

$$U = - \int^r ma_r dr = mC_0^2 \left(-\frac{1}{2r^2} - \frac{8a}{r^2\sqrt{r}} \right).$$

Effektivni potencial pa je

$$U_{eff} = \frac{l^2}{2mr^2} + U = -\frac{8amC_0^2}{r^2\sqrt{r}}.$$

Za nepozitivno energijo točka vedno pade v center sile, za pozitivno pa pade v center sile ali pa ubeži v neskončnost.

- (c) Velja zveza $\frac{1}{2}C_0T = A$, kjer je

$$A = \int_0^{2\pi} r^2 dr = \frac{a^2(2\pi)^9}{9}.$$

Potem je

$$C_0 = \frac{2a^2(2\pi)^9}{9T}.$$

3. (a) Postavimo RKS tako, da je ravnina gibanja ravnina xy , os pa je v smeri vektorja $\vec{e} = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{k}$. Tu smo z $\vec{i}$ in $\vec{j}$ zapisali bazna vektorja v RKS. Newtonova enačba se glasi

$$m\vec{a}_{rel} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{S}.$$

Tu je $\vec{\omega} = \omega\vec{e}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{S} = S\vec{k}$ pa je sila vezi, ki veže gibanje točke na ravnino. Upoštevajmo, da je $\vec{v}_{rel} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$. Potem se po krajšem računu Newtonove enačbe v RKS v komponentnem zapisu glasijo

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= m\omega^2 \sin^2\alpha x + 2m\omega \sin\alpha\dot{y} \\ m\ddot{y} &= m\omega^2 y - 2m\omega \sin\alpha\dot{x} \\ 0 &= -m\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha x - 2m\omega \cos\alpha\dot{y} + S. \end{aligned}$$

- (b) Če se ravnina vrti počasi, smemo zanemariti člena z ω^2 . Tako dobimo poenostavljene enačbe

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega \sin\alpha\dot{y} \\ \ddot{y} &= -2\omega \sin\alpha\dot{x} \\ 0 &= -2m\omega \cos\alpha\dot{y} + S. \end{aligned}$$

- (c) Izračunajmo

$$\ddot{x} = 2\omega \sin\alpha\dot{y} = 4\omega^2 \sin^2\alpha x.$$

Označimo $u = \dot{x}$. Potem je

$$\dot{x} = u = 2A\omega \sin\alpha \cos(2\omega \sin\alpha t - \delta)$$

in

$$x = A \sin(2\omega \sin \alpha t - \delta) + C_1.$$

Določimo še y . Velja

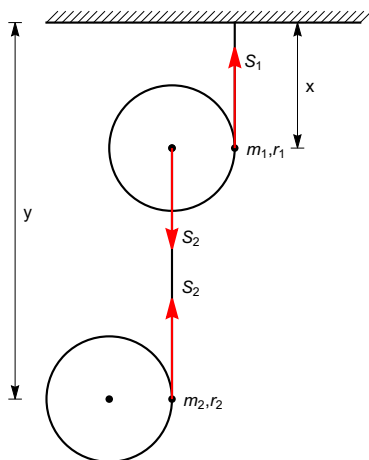
$$\dot{y} = \frac{1}{2\omega \sin \alpha} \ddot{x} = -2A\omega \sin \alpha \sin(2\omega \sin \alpha t - \delta).$$

Tako dobimo

$$y = A \cos(2\omega \sin \alpha t - \delta) + C_2.$$

Točka se giblje po krožnici.

4. (a) Označimo položaja škripcev tako kot kaže skica. Naj bo φ_1 kot zavrtitve prvega in φ_2 kot zavrtitve drugega škripca. Enačbe gibanja so potem



Slika 2: Sile vrvic.

$$m_1 \ddot{x} = m_1 g - S_1 + S_2,$$

$$m_2 \ddot{y} = m_2 g - S_2,$$

$$\frac{1}{2} m_1 r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = r_1 S_1,$$

$$\frac{1}{2} m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_2 = r_2 S_2,$$

- (b) Kinematični vezi sta

$$\dot{x} = r_1 \dot{\varphi}_1 \quad \text{in} \quad \dot{y} = \dot{x} + r_2 \dot{\varphi}_2.$$

- (c) Iz kinematičnih zvez in enačb gibanja sledi

$$\frac{1}{2} m_1 \ddot{x} = S_1 \quad \text{in} \quad \frac{1}{2} m_2 (\ddot{y} - \ddot{x}) = S_2.$$

Potem je po kratkem računu

$$\ddot{y} = \frac{2}{3} g + \frac{1}{3} \ddot{x}$$

in

$$\ddot{x} = \frac{2g(3m_1 + m_2)}{9m_1 + 2m_2} \quad \text{in} \quad \ddot{y} = \frac{2g(4m_1 + m_2)}{9m_1 + 2m_2}.$$

Valja padata enakomerno pospešeno.