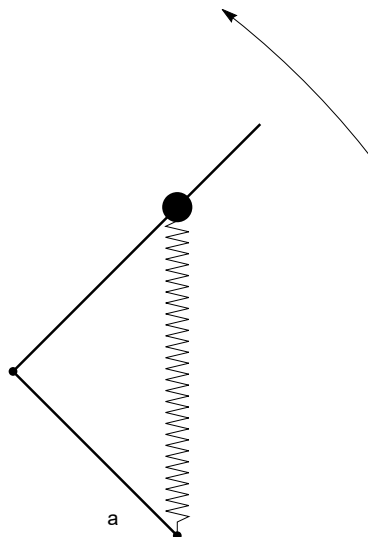


2. kolokvij iz Mehanike

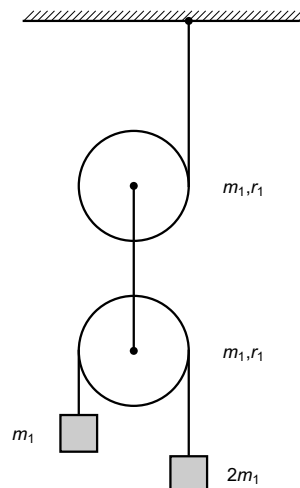
1. Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po tiru $r(\varphi) = r_0\varphi^2$, $r_0 > 0$.
 - (a) Določi silo.
 - (b) Izračunaj efektivni potencial in kvalitativno obravnavaj možna gibanja. Določi tudi energijo danega tira.
 - (c) Določi trajektorijo $\varphi = \varphi(t)$.

2. Po vodilu, ki enakomerno kroži s kotno hitrostjo ω se brez trenja giblje materialna točka z maso m , ki je pripeta z vzmetjo, tako kot kaže skica. Koe-ficient vzmeti je k , njegova neraztegnjena dolžina pa je a .

- (a) Zapiši enačbe gibanja v relativnem koordinatnem sistemu, ki se vrti hkrati z vodilom.
- (b) Poišči ravnovesne lege v relativnem koordinatnem sistemu. Določi pogoj, da ravnovesna lega ni ena sama.
- (c) Za ravnovesno lego na osi rotacije določi pogoj, da bo stabilna.



3. Za homogeni kvader dimenzije $a \times b \times c$
 - (a) Izračunaj vztrajnostni tenzor s polom v masnem središču.
 - (b) Izračunaj vztrajnostni moment okrog osi v smeri telesne diagonale kvadra.
4. Na valj z maso m_1 in polmerom r_1 je navita vr-vica, na valj pa je obešen škripec tako kot kaže skica. Zapiši enačbe gibanja in določi gibanje uteži na škripcu.



Rešitve

1. (a) Uporabimo Binetovo formulo $a_r = -C_0^2 u^2 (u + u'')$, kje je $u = 1/r$. Po krajšem računu dobimo

$$a_r = -\frac{C_0^2(6r_0 + r)}{r^4}.$$

Sila je potem $\vec{F} = ma_r \vec{e}_r$.

- (b) Potencial sile je

$$U = -\int_{\infty}^r ma_r dr = -mC_0^2 \left(-\frac{2_0}{r^3} - \frac{1}{2r^2} \right),$$

efektivni potencial pa je

$$U_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2mr^2} + U = -2mC_0^2 r_0 r^{-3}.$$

Tu smo upoštevali, da je $l = mC_0$. Za negativno energijo so tiri omejeni, za nenegativno pa neomejeni. Izračunajmo še energijo

$$E_0 = T + U = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}.$$

Iz enačbe tira sledi, da je $\dot{r} = 2r_0 \varphi \dot{\varphi}$. Potem je $\dot{r}^2 = 4r_0 \varphi^2 \dot{\varphi}^2 = 4C_0^2 r_0 r^{-3}$ in

$$E_0 = 2mC_0^2 r_0 r^{-3} - 2mC_0^2 r_0 r^{-3} = 0.$$

Dani tir $r = r_0 \varphi^2$ torej ustreza ničelni energijski nivojnici.

- (c) Vstavimo $r = r_0 \varphi^2$ v $r^2 \dot{\varphi} = C_0$. Dobimo enačbo $\dot{\varphi} = C_0 / (r_0^2 \varphi^4)$. Rešitev enačbe pri začetnem pogoju $\varphi(t=0) = \varphi_0$ je

$$\varphi = \sqrt{\varphi_0^5 + 5C_0 t / r_0^2}.$$

2. (a) Označimo z $\vec{e}_1$ bazni vektor relativnega koordinatnega sistema v smeri vodila in z $\vec{e}_2$ bazni vektor v negativni smeri pritrdišča vzmeti. Potem je $\vec{\zeta} = \zeta \vec{e}_1$. Vektor kotne hitrosti je $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$, na točko pa deluje sila vezi $\vec{S} = S \vec{e}_2$ in sila vzmeti $\vec{F}$. Sila vzmeti deluje v smeri vektorja $-a \vec{e}_2 - \zeta \vec{e}_1$, raztezek vzmeti pa je $\sqrt{a^2 + \zeta^2} - a$. Sila vzmeti je tako

$$\vec{F} = k \left(\sqrt{a^2 + \zeta^2} - a \right) \frac{-a \vec{e}_2 - \zeta \vec{e}_1}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}}.$$

Newtonova enačba v RKS je

$$m \vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F} + \vec{S} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - 2m \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} = \vec{F} + \vec{S} + m \omega^2 \zeta \vec{e}_1 - 2m \omega \dot{\zeta} \vec{e}_2$$

oziroma po komponentah

$$\begin{aligned} m \ddot{\zeta} &= -k \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}} \right) \zeta + m \omega^2 \zeta, \\ 0 &= -k \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}} \right) a + S - 2m \omega \dot{\zeta}. \end{aligned}$$

(b) V ravnovesni legi je $\ddot{\zeta}$. Ena ravnovesna lega je očitno $\zeta = 0$, druga pa je koren enačbe

$$k \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}} \right) = m\omega^2.$$

Ker za $\zeta > 0$ velja

$$0 < 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}} < 1,$$

nastopi ta ravnovesna lega pri pogoju $m\omega^2 < k$. Po krajšem računu dobimo, da je iskani koren

$$\zeta_2 = \frac{a\omega\sqrt{m(2k - m\omega^2)}}{k - m\omega^2}.$$

(c) Obravnavajmo še stabilnost. Pomnožimo enačbo gibanja v smeri $\vec{e}_1$ z $\dot{\zeta}$. Potem je

$$m\ddot{\zeta}\dot{\zeta} + (k - m\omega^2)\dot{\zeta} - k\frac{a}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}}\dot{\zeta}.$$

Potem je

$$\frac{1}{2}m\dot{\zeta}^2 + \frac{1}{2}(k - m\omega^2)\zeta^2 - ka\sqrt{a^2 + \zeta^2} = E_0,$$

kjer je E_0 energijska konstanta. Potencial gibanja je tako

$$U = \frac{1}{2}(k - m\omega^2)\zeta^2 - ka\sqrt{a^2 + \zeta^2}.$$

Za stabilnost ravnovesne lege $\zeta = 0$ mora veljati $U''(\zeta = 0) > 0$. Prvi odvod je

$$U' = (k - m\omega^2)\zeta - k\frac{a}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}}\zeta,$$

drugi odvod v $\zeta = 0$ pa

$$U''(\zeta = 0) = k - m\omega^2 - k = -m\omega^2.$$

Ravnovesna lega $\zeta = 0$ ni stabilna.

3. (a) Prvo izračunajmo moment

$$I_x = \int_B x^2 dm = \rho_0 \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx = \rho_0 bc \frac{2}{3} (a/2)^3 = \frac{1}{12} \rho_0 a^3 bc = \frac{1}{12} a^2.$$

Brez računa potem vidimo, da je

$$I_y = \frac{1}{12} b^2, \quad I_z = \frac{1}{12} c^2.$$

Vztrajnostni momenti so potem

$$J_x = \frac{1}{12}(b^2 + c^2), \quad J_y = \frac{1}{12}(a^2 + c^2), \quad J_z = \frac{1}{12}(a^2 + b^2).$$

Izvendiagonalni, deviacijski momenti, so vsi enaki nič.

(b) Izračunati moramo $J_e = \vec{e} \cdot \underline{\underline{J}} \vec{e}$, kjer je $\vec{e}$ enotski vektor v smeri diagonale. Izrazimo

$$\vec{e} = (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Potem je

$$J_e = \frac{(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) m}{6(a^2 + b^2 c^2)}.$$

4. Označimo sile tako kot kaže skica. Z x označimo oddaljenost prvega valja od stropa, z y za koliko se je spustila glede na škripec leva utež, z z pa desna. Enačbe gibanja so

$$\begin{aligned}m_1 x'' &= F + m_1 g - S_1, \\m_1 x'' &= -F + S_2 + S_3 + m_1 g, \\m_1 (x'' + y'') &= m_1 g - S_2, \\2m_1 (x'' + z'') &= 2m_1 g - S_3, \\\frac{1}{2}m_1 r_1^2 \ddot{\varphi}_1 &= r_1 S_1, \\\frac{1}{2}m_1 r_1^2 \ddot{\varphi}_2 &= r_1 S_2 - r_1 S_3,\end{aligned}$$

kinematične vezi pa so $\dot{z} = -\dot{y}$, $r_1 \dot{\varphi}_1 = \dot{x}$ in $r_1 \dot{\varphi}_2 = \dot{y}$. Tu je φ_1 kot zavrtitve zgornjega valja, φ_2 pa spodnjega. Enačbe rešimo, eliminiramo kota s pomočjo kinematičnih vezi, nato eliminiramo pospeške in tako dobimo štiri enačbe za neznanne sile F , S_1 , S_2 in S_3 . Po krajšem računu dobimo

$$S_1 = \frac{33}{73}m_1 g, \quad S_2 = \frac{9}{73}m_1 g, \quad S_3 = \frac{10}{73}m_1 g, \quad F = \frac{26}{73}m_1 g,$$

in potem

$$\ddot{x} = \frac{66}{73}g, \quad \ddot{y} = -\frac{2}{73}g.$$

