

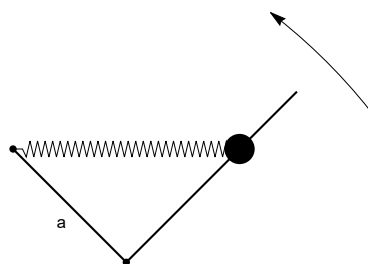
2. predkolokvij iz Mehanike

1. Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po tiru $r(\varphi) = r_0\sqrt{\varphi}$, $r_0, \varphi \geq 0$.

- Določi silo.
- Izračunaj efektivni potencial in kvalitativno obravnavaj možna gibanja.
- Določi trajektorijo $\varphi = \varphi(t)$ gibanja.

2. Po vodilu, ki enakomerno kroži s kotno hitrostjo ω se brez trenja giblje materialna točka z maso m , ki je pripeta z vzmetjo, tako kot kaže skica. Koe-ficient vzmeti je k , njegova neraztegnjena dolžina pa $a/2$.

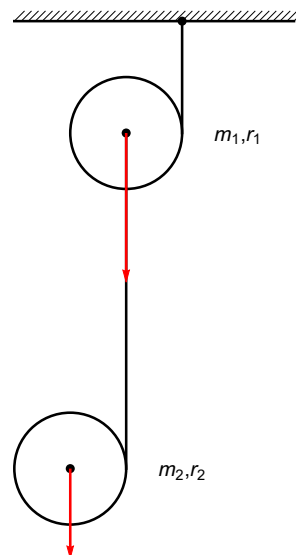
- Zapiši enačbe gibanja v relativnem koordinatnem sistemu, ki se vrti hkrati z vodilom.
- Poišči ravnovesne lege v relativnem koordinatnem sistemu.
- Za ravnovesno lego na osi rotacije določi pogoje, da bo stabilna.



3. Homogena pokončna prizma višine h ima za osnovno ploskev enakostranični trikotnik z dolžino stranice a .

- Določi masno središče prizme.
- Izračunaj vztrajnostni moment prizme okrog osi v smeri višine prizme.
- Izračunaj vztrajnostni tenzor s polom v masnem središču.

4. Dvojni jojo. Na valja z maso m_1 in m_2 sta naviti vrvi. Vrvica valja m_1 je pritrjena na strop, vrvica valja m_2 pa na središče valja m_1 , glej skico. Določi gibanje valjev.



Rešitve

1. (a) Uporabimo Binetovo formulo $a_r = -C_0^2 u^2 (u + u'')$, kje je $u = 1/r$. Po krajšem računu dobimo

$$a_r = -C_0^2 \left(r^{-3} + \frac{3}{4} r_0^4 r^{-7} \right).$$

Sila je potem $\vec{F} = m a_r \vec{e}_r$.

- (b) Potencial sile je

$$U = - \int_{\infty}^r m a_r dr = -m C_0^2 \left(\frac{1}{2} r^{-2} + \frac{1}{8} r_0^4 r^{-6} \right),$$

efektivni potencial pa je

$$U_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2mr^2} + U = -m C_0^2 \frac{1}{8} r_0^4 r^{-6}.$$

Tu smo upoštevali, da je $l = m C_0$. Za negativno energijo so tiri omejeni, za nenegativno pa neomejeni.

- (c) Vstavimo $r = r_0 \sqrt{\varphi}$ v $r^2 \dot{\varphi} = C_0$. Dobimo enačbo $\dot{\varphi} = C_0 / (r_0^2 \varphi)$. Rešitev enačbe pri začetnem pogoju $\varphi(t=0) = \varphi_0$ je

$$\varphi = \sqrt{\varphi_0^2 + 2C_0 t / r_0^2}.$$

2. (a) Označimo z $\vec{e}_1$ bazni vektor relativnega koordinatnega sistema v smeri vodila in z $\vec{e}_2$ bazni vektor v smeri pritrdišča vzmeti. Potem je $\vec{\zeta} = \zeta \vec{e}_1$. Vektor kotne hitrosti je $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$, na točko pa deluje sila vezi $\vec{S} = S \vec{e}_2$ in sila vzmeti $\vec{F}$. Sila vzmeti deluje v smeri vektorja $a \vec{e}_2 - \zeta \vec{e}_1$, raztezek vzmeti pa je $\sqrt{a^2 + \zeta^2} - a/2$. Sila vzmeti je tako

$$\vec{F} = k \left(\sqrt{a^2 + \zeta^2} - a/2 \right) \frac{a \vec{e}_2 - \zeta \vec{e}_1}{\sqrt{a^2 + \zeta^2}}.$$

Newtonova enačba v RKS je

$$m \vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F} + \vec{S} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - 2m \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} = \vec{F} + \vec{S} + m \omega^2 \vec{\zeta} \vec{e}_1 - 2m \omega \dot{\zeta} \vec{e}_2$$

oziroma po komponentah

$$\begin{aligned} m \ddot{\zeta} &= -k \left(1 - \frac{a}{2\sqrt{a^2 + \zeta^2}} \right) \zeta + m \omega^2 \zeta, \\ 0 &= k \left(1 - \frac{a}{2\sqrt{a^2 + \zeta^2}} \right) a + S - 2m \omega \dot{\zeta}. \end{aligned}$$

- (b) V ravnovesni legi je $\ddot{\zeta} = 0$. Ena ravnovesna lega je očitno $\zeta = 0$, druga pa je koren enačbe

$$k \left(1 - \frac{a}{2\sqrt{a^2 + \zeta^2}} \right) = m \omega^2.$$

Ker za $\zeta > 0$ velja

$$\frac{1}{2} < 1 - \frac{a}{2\sqrt{a^2 + \zeta^2}} < 1,$$

nastopi ta ravnovesna lega pri pogoju $m\omega^2 < k < 2m\omega^2$. Po krajšem računu dobimo, da je iskani koren

$$\zeta_2 = \frac{a}{2(k - m\omega^2)} \sqrt{8km\omega^2 - 3k^2 - 4m^2\omega^4}.$$

(c) Obravnavajmo še stabilnost. Pomnožimo enačbo gibanja v smeri $\vec{e}_1$ z $\dot{\zeta}$. Potem je

$$m\ddot{\zeta}\dot{\zeta} + (k - m\omega^2)\zeta\dot{\zeta} - k\frac{a}{2\sqrt{a^2 + \zeta^2}}\zeta\dot{\zeta}.$$

Potem je

$$\frac{1}{2}m\dot{\zeta}^2 + \frac{1}{2}(k - m\omega^2)\zeta^2 - \frac{1}{2}ka\sqrt{a^2 + \zeta^2} = E_0,$$

kjer je E_0 energijska konstanta. Potencial gibanja je tako

$$U = \frac{1}{2}(k - m\omega^2)\zeta^2 - \frac{1}{2}ka\sqrt{a^2 + \zeta^2}.$$

Za stabilnost ravnovesne lege $\zeta = 0$ mora veljati $U''(\zeta = 0) > 0$. Prvi odvod je

$$U' = (k - m\omega^2)\zeta - k\frac{a}{2\sqrt{a^2 + \zeta^2}}\zeta,$$

drugi odvod v $\zeta = 0$ pa

$$U''(\zeta = 0) = k - m\omega^2 - k/2 = k/2 - m\omega^2.$$

Ravnovesna lega $\zeta = 0$ je stabilna pri pogoju $k > 2m\omega^2$.

3. (a) Masno središče trikotnika je v oddaljenosti $1/3$ višine trikotnika, torej $a/2\sqrt{3}$.
- (b) Vztrajnostni moment v smeri višine prizme skozi masno središče je

$$J_z = \int_B (x^2 + y^2) dm.$$

Izračunajmo moment

$$I_x = \int_B x^2 dm = \rho_0 \int_{-h/2}^{h/2} dx \int_{\Delta} x^2 dx dy = h\rho_0 \int_{\Delta} x^2 dx dy.$$

Izračunajmo posebej

$$\int_{\Delta} x^2 dx dy = 2 \int_0^{a/2} dx \int_{-a/2\sqrt{3}}^{y(x)} x^2 dy,$$

kjer je $y(x) = a/\sqrt{3} - x\sqrt{3}$. Potem je

$$I_x = \int_B x^2 dm = 2 \int_0^{a/2} x^2 \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\sqrt{3} \right) dx = \frac{a^4\sqrt{3}}{96}.$$

Upoštevajmo, da je masa $m = \frac{\rho_0 a^2 h \sqrt{3}}{4}$. Potem je

$$I_x = \frac{1}{24} ma^2.$$

Moment I_y je

$$I_y = \int_B y^2 dm = \rho_0 \int_{-h/2}^{h/2} dx \int_{\Delta} y^2 dxdy = h\rho_0 \int_{\Delta} y^2 dxdy$$

in

$$\int_{\Delta} y^2 dxdy = 2 \int_{-a/2\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} dy \int_0^{x(y)} y^2 dx,$$

kjer je sedaj $x(y) = a/3 - y/\sqrt{3}$. Potem je

$$\int_{\Delta} y^2 dxdy = 2 \int_{-a/2\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} y^2 \left(\frac{a}{3 - \frac{y}{\sqrt{3}}} \right) dy = \frac{a^4 \sqrt{3}}{96}$$

in tako

$$I_y = I_x = \frac{1}{24} ma^2.$$

Iskani moment je $J_z = \frac{1}{12} ma^2$.

(c) Izračunati moramo še

$$I_z = \int_B z^2 dm = \rho_0 \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \int_{\Delta} dxdy = \frac{2}{3} \rho_0 \frac{h^3}{8} |\Delta| = \frac{1}{12} mh^2.$$

Potem je

$$J_x = J_y = \frac{1}{24} m(a^2 + 2h^2).$$

4. Označimo z S_1 silo vrvice na zgornji valj in S_2 na spodnji. Naj bo x oddaljenost zgornjega valja od stropa in y oddaljenost spodnjega valja do zgornjega. Enačbe gibanja so

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= m_1 g + S_2 - S_1, \\ m_2 (\ddot{x} + \ddot{y}) &= m_2 g - S_2, \\ \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \ddot{\varphi} &= r_1 S_1, \\ \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \ddot{\theta} &= r_2 S_2, \end{aligned}$$

kinematični enačbi pa sta $\dot{\varphi} r_1 = \dot{x}$ in $\dot{\theta} r_2 = \dot{y}$. Potem je $S_1 = \frac{1}{2} m_1 \ddot{x}$ in $S_2 = \frac{1}{2} m_2 \ddot{y}$. Vstavimo dobljeno v prvi dve enačbi. Dobimo sistem dveh enačb za $\ddot{x}$ in $\ddot{y}$. Rešitev je

$$\ddot{x} = \frac{2g(3m_1 + m_2)}{9m_1 + 2m_2}, \quad \ddot{y} = \frac{2gm_1}{9m_1 + 2m_2}.$$