

Analiza 3

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

Osnove teorije stabilnosti

V tem predavanju obravnavamo osnovne pojme teorije stabilnosti dinamičnih sistemov. Glavne teme so naslednje:

- Stabilni, nestabilni in centralni podprostor linearnega sistema
- Izrek o stabilnosti linearnih sistemov
- Stabilnost majhnih perturbacij linearnih sistemov.
- Izrek Hartman-Grobman o topološki stabilnosti
- Pojem stabilne in nestabilne mnogoterosti negibne točke
- Poincaréjeva preslikava in stabilnost ciklov
- Kaotični pojavi v dinamičnih sistemih

Stabilni, nestabilni in centralni podprostor linearnega sistema

Naj bo A kvadratna $n \times n$ matrika in $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ pripadajoč linearni sistem diferencialnih enačb. Prosto $\mathbb{R}^n$ razcepimo na direktno vsoto treh vektorskih podprostorov:

$$\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_n \oplus E_c.$$

- **Stabilni prostor**, E_s , je linearna lupina vseh lastnih in korenskih vektorjev, ki pripadajo lastnim vrednostim λ matrike A z $\Re \lambda < 0$.
- **Nestabilni prostor**, E_n , je linearna lupina vseh lastnih in korenskih vektorjev, ki pripadajo lastnim vrednostim λ matrike A z $\Re \lambda > 0$.
- **Centralni prostor**, E_c , je linearna lupina vseh lastnih in korenskih vektorjev ki pripadajo lastnim vrednostim λ matrike A z $\Re \lambda = 0$.

Iz že narejene analize sledi, da se tok $\phi_t(\mathbf{x}) = e^{tA}\mathbf{x}$:

- eksponentno približuje izhodišču 0, če je $\mathbf{x} \in E_s$;
- eksponentno oddaljuje od izhodišča, če je $\mathbf{x} \in E_n$;
- miruje ali kroži, če je $\mathbf{x} \in E_c$ lastni vektor z lastno vrednostjo z $\Re \lambda = 0$;
- ima polinomsko obnašanje, če je $\mathbf{x} \in E_c$ korenski vektor z $\Re \lambda = 0$.

Stabilne in privlačne negibne točke

Opazujmo sistem diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

na neki domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ in naj bo $\phi_t(\mathbf{x})$ njen tok.

Definicija

Negibna točka $\mathbf{x}^0 \in D$ sistema ($\mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = 0$) je

- (a) **stabilna**, če za vsako okolico $O \subset D$ točke $\mathbf{x}^0$ obstaja manjša okolica $O' \subset O$ točke $\mathbf{x}^0$, tako da je $\phi_t(\mathbf{x}) \in O$ za vsak $\mathbf{x} \in O'$ in $t \geq 0$.
- (b) **privlačna**, če obstaja okolica O točke $\mathbf{x}^0$, tako da za vsak $\mathbf{x} \in O$ in $t \geq 0$ velja

$$\phi_t(\mathbf{x}) \in O \quad \text{in} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^0.$$

- (c) **globalno privlačna** na D , če velja točka (b) za $O = D$.
- (d) **(globalno) odbojna**, če je (globalno) privlačna pri obratu časa.

Stabilnost linearnega sistema

Iz prej povedanega ter definicij sledi naslednji izrek za linearni sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad \text{na } \mathbb{R}^n.$$

Izrek

- Če imajo vse lastne vrednosti matrike A negativen realni del, potem je izhodišče $0 \in \mathbb{R}^n$ globalno privlačna negibna točka.
- Če vse lastne vrednosti A zadoščajo $\Re \lambda \leq 0$ in ima centralni prostor E_c bazo lastnih vektorjev, potem je $0 \in \mathbb{R}^n$ stabilna negibna točka.

Izrek lahko dokažemo tudi z uporabo metode Lyapunova. Oglejmo si najprej primer, ko je $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Tedaj je

$$A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Če so vse lastne vrednosti ≤ 0 , je zgornji izraz ≤ 0 na $\mathbb{R}^n$ in zato je vsaka krogla $B_r = \{|\mathbf{x}| \leq r\}$ kletka za tok; torej je izhodišče stabilna točka.

Negativne lastne vrednosti

Če velja $\lambda_i < 0$ za $i = 1, \dots, n$, se tok eksponentno približuje izhodišču. Direktno to vidimo takole. Kvadratično formo $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ lahko ocenimo navzgor:

$$A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \leq -c|\mathbf{x}|^2 \quad \text{za nek } c > 0.$$

Fiksiramo začetno točko $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in označimo

$$u(t) = |\phi_t(\mathbf{x})|^2 = |e^{tA}\mathbf{x}|^2.$$

Tedaj je

$$\dot{u}(t) = 2\dot{\phi}_t(\mathbf{x}) \cdot \phi_t(\mathbf{x}) = 2A\phi_t(\mathbf{x}) \cdot \phi_t(\mathbf{x}) \leq -2c|\phi_t(\mathbf{x})|^2 = -2cu(t).$$

Z integracijo dobimo

$$|\phi_t(\mathbf{x})|^2 = u(t) \leq e^{-2ct}u(0) = e^{-2ct}|\mathbf{x}|^2$$

$$|\phi_t(\mathbf{x})| \leq e^{-ct}|\mathbf{x}|.$$

Podobno analiziramo primer s parom konjugirano kompleksnih lastnih vrednostji $-a \pm ib$, $a > 0$ (ali več takimi pari).

Primer z Jordanovo kletko

Če matrika A ni diagonalizabilna, lahko dobimo analogno oceno kvadratične forme $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ v neki drugi bazi (ekvivalentno, za neko konjugirano matriko). Oglejmo si Jordanovo kletko J dimenzije k z lastno vrednostjo λ . Velja torej

$$J\mathbf{e}_1 = \lambda\mathbf{e}_1, \quad J\mathbf{e}_2 = \lambda\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1, \dots, J\mathbf{e}_k = \lambda\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k-1}.$$

Če izberemo $\mu > 0$ in uvedemo novo bazo korenskega podprostora

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_2 = \mu\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_3 = \mu^2\mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}'_k = \mu^{k-1}\mathbf{e}_k,$$

dobimo v tej bazi posplošeno Jordanovo kletko $J_{\lambda,\mu}$ z lastno vrednostjo λ ter številom μ na prvi zgornji naddiagonali. Pri majhnem μ je to majhna perturbacija diagonalne matrike. Če je $\lambda < 0$, dobimo pri majhnem μ oceno

$$J_{\lambda,\mu}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \leq -c|\mathbf{x}|^2$$

za nek $c > 0$. Odtod sledi enako kot prej, da se tok na tem korenskem podprostoru eksponentno približuje izhodišču.

Če ima centralni podprostor E_c bazo lastnih vektorjev, velja $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \leq 0$ za vse $\mathbf{x} \in E_c$, in posledično za vse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Torej je 0 stabilna negibna točka.

Nelinearna perturbacija linearne sistema

Oglejmo si sedaj nelinearen sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0.$$

Izrek

Če vse lastne vrednosti matrice $A = d\mathbf{F}_0$ zadoščajo $\Re \lambda < 0$, je 0 privlačna negibna točka zgornjega sistema.

Dokaz Po spremembi baze v $\mathbb{R}^n$ (oziroma konjugaciji matrice A) velja $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \leq -c|\mathbf{x}|^2$ za neko konstanto $c > 0$. Naj bo $\mathbf{x}(t) = \phi_t(\mathbf{x})$ trajektorija z začetno točko $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ blizu izhodišča. Oglejmo si funkcijo $u(t) = |\mathbf{x}(t)|^2$.

$$\dot{u}(t) = 2\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{x}(t) = 2A\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}(t).$$

Ker je $|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))| = o(|\mathbf{x}(t)|)$, je $|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}(t)| = o(|\mathbf{x}(t)|^2)$ in zato

$$\dot{u}(t) \leq -2c_0|\mathbf{x}(t)|^2 = -2c_0u(t)$$

za neko konstanto $-c < -c_0 < 0$. Kot prej sledi $|\mathbf{x}(t)| \leq e^{-c_0 t}|\mathbf{x}(0)|$.

Izrek Hartman-Grobman

Pojavi se vprašanje, kdaj je nelinearna perturbacija linearne sistema konjugirana linearnemu sistemu, v smislu da lahko enega prevedemo v drugega z zamenjavo koordinat v okolici negibne točke. Velja naslednji izrek.

Izrek

Naj bo A matrika, katere lastne vrednosti imajo neničeln realni del. Naj bo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0$$

majhna $\mathcal{C}^1$ perturbacija linearne sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ in označimo s ϕ_t njegov tok. Tedaj obstaja homeomorfizem Θ v okolici 0 s $\Theta(0) = 0$, ki zadošča

$$\Theta(\phi_t(\mathbf{x})) = e^{tA} \Theta(\mathbf{x})$$

za majhne vrednosti $|t|$ in za točke $\mathbf{x}$ blizu 0.

To pomeni, da Θ preslika tok nelinearnega polja $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ v tok linearne polja $A\mathbf{x}$ (to je linearizacija polja $\mathbf{F}$ v 0) v okolici negibne točke 0. Fazna portreta ima torej enake topološke karakteristike.

Linearizacija z difeomorfizmi

Izreka Hartman-Grobman ne bomo dokazali, ker je sorazmerno zahteven.

Seveda je še pomembnejše vprašanje, kdaj je nelinearen sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

v okolici negibne točke konjugiran linearnemu sistemu; to je, **kdaj obstaja difeomorfizem Θ v okolici 0, ki zadošča**

$$d\Theta_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \Theta(\mathbf{x}).$$

Iz tega seveda sledi, da Θ preslika tok polja $\mathbf{F}$ v tok linearnega polja.

Znano je, da to velja za veliko večino matrik, katerih lastne vrednosti imajo neničelne realne dele. Izjeme so matrike, pri katerih obstajajo določene celoštevilске relacije (t.i. resonance) med njihovimi lastnimi vrednostmi. Ta teorija je precej zahtevna in je ne bomo podrobneje obravnavali.

Stabilna in nestabilna mnogoterost

Ponovno opazujmo sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0.$$

Pojavi se vprašanje, kakšno strukturo imata množici

$$W_s = \{\mathbf{x} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(\mathbf{x}) = 0\}, \quad W_n = \{\mathbf{x} : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Velja naslednji izrek.

Izrek

Denimo, da ima $n \times n$ matrika $\mathbf{A} = d\mathbf{F}_0$ natanko k lastnih vrednosti z negativnim realnim delom ter $n - k$ lastnih vrednosti s pozitivnim realnim delom. Potem sta množici W_s in W_n v okolici izhodišča $\mathcal{C}^1$ podmnogoterosti dimenzije k oziroma $n - k$.

Natačneje, če je $\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_n$ razcep na stabilni in nestabilni podprostor matrike $\mathbf{A}$, potem je W_s v izhodišču tangenta na E_s , W_n pa je v izhodišču tangenta na E_n .

W_s se imenuje **stabilna mnogoterost**, W_n pa **nestabilna mnogoterost** točke 0. Če je negibna točka $\mathbf{p}$, uporabljamo oznake $W_s(\mathbf{p})$ in $W_n(\mathbf{p})$.

Z izbiro koordinat lahko dosežemo, da je

$$E_s = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}, \quad E_n = \{0\}^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Tedaj je W_s graf neke $\mathcal{C}^1$ preslikave $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ v okolici $0 \in \mathbb{R}^k$ z $dg_0 = 0$.

Analogno je W_n graf neke $\mathcal{C}^1$ preslikave $h : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ v okolici $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ z $dh_0 = 0$.

Če je Θ topološka ali difeomorfna konjugacija toka ϕ_t polja $\mathbf{F}$ v tok e^{tA} linearnega polja $A\mathbf{x}$, potem v neki okolici izhodišča velja

$$\Theta(W_s) = E_s, \quad \Theta(W_n) = E_n.$$

Poanta izreka je v tem, da tudi če gladka konjugacija ne obstaja (ampak je Θ le homeomorfizem, ki obstaja po izreku Hartman-Grobman), sta W_s in W_n dobro definirani $\mathcal{C}^1$ podmnogoterosti, ki sta v izhodišču tangentni na E_s oz. E_n .

Primer 1

Oglejmo si sistem

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y + x^2; \quad \mathbf{F}(x, y) = (-x, y + x^2).$$

Očitno je $(0, 0)$ negibna točka (ničla vektorskega polja $\mathbf{F}$) in njegova linearizacija v $(0, 0)$ je

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y; \quad A = \text{diag}(-1, 1).$$

Tok nelinearnega polja je

$$\phi_t(x, y) = \left(e^{-t}x, e^t(y + x^2/3) - e^{-2t}x^2/3 \right),$$

tok linearnega polja pa

$$\psi_t(x, y) = (e^{-t}x, e^ty).$$

Linearizacijo iščemo z nastavkom

$$\Theta(x, y) = (x, y + cx^2).$$

Stabilna in nestabilna mnogoterost v primeru 1

Konjugacijska enačba

$$d\Theta(x, y)\mathbf{F}(x, y) = A \cdot \Theta(x, y)$$

nam s preprostim računom da rešitev

$$c = 1/3, \quad \Theta(x, y) = (x, y + x^2/3), \quad \Theta^{-1}(x, y) = (x, y - x^2/3).$$

V tem primeru je

$$E_s = \mathbb{R} \times \{0\}, \quad E_n = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Stabilna in nestabilna mnogoterost točke $(0, 0)$ v sistemu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ sta

$$W_s = \Theta^{-1}(E_s) = \{(x, y) : y = -x^2/3\},$$

$$W_n = \Theta^{-1}(E_n) = \{(x, y) : x = 0\} = E_n.$$

Primer 2

Oglejmo si sistem

$$\dot{x} = x(x-1), \quad \dot{y} = -y.$$

Linearizacija v $(0,0)$ je

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -y, \quad E_s = \mathbb{R}^2.$$

Točka $(0,0)$ je privlačna negibna točka.

Linearizacija v $(1,0)$ je

$$\dot{x} = x-1, \quad \dot{y} = -y,$$

Točka $(1,0)$ je hiperbolična (sedelna) negibna točka.

Stabilne in nestabilne mnogoterosti obeh stacionarnih točk so

$$W_s(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}, \quad W_n(0,0) = \{(0,0)\},$$

$$W_s(1,0) = \{(1,y) : y \in \mathbb{R}\}, \quad W_n(1,0) = \{(x,0) : 0 < x < +\infty\}$$

Stabilnost ciklov

Cikel je sklenjena (periodična) orbita vektorskega polja.

Posplošeni cikel sestoji iz končno mnogo trajektorij, ki povezujejo pare kritičnih točk (ničel vektorskega polja) v ustreznih smereh in se sklenejo v cikel.

Cikel C je **stabilen**, če za vsako njegovo okolico U obstaja manjša okolica $C \subset U' \subset U$, tako da trajektorije z začetkom v U' ostanejo v U pri vseh $t > 0$.

Cikel C je **asimptotično stabilen** ali **privlačen**, če ima okolico U , tako da za vsako točko $x \in U$ velja

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\phi_t(x), C) = 0.$$

To pomeni, da se vse bližnje trajektorije približujejo ciklu C .

Analizo stabilnosti cikla lahko naredimo tako, da si ogledamo dinamiko **Poincaréjeve (povratne) preslikave**; angl. **Poincaré first return map**.

Pri tem si lahko pomagamo z linearizacijo danega sistema diferencialnih enačb vzdolž cikla.

Poincaréjeva povratna preslikava

Naj bo $\mathbf{F}$ vektorsko polje na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$. Naj bo $C \subset D$ cikel polja $\mathbf{F}$ in $\mathbf{p} \in C$ poljubna točka na njem. Označimo s $T(\mathbf{p}) > 0$ periodo (obhodni čas) cikla; ta je neodvisna od izbire točke $\mathbf{p} \in C$.

Izberimo hiperravnino $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, ki gre skozi $\mathbf{p}$ in ne vsebuje vektorja $\mathbf{F}(\mathbf{p})$; pravimo, da je Σ **transverzalna** na C v točki $\mathbf{p}$. Naj bo U neka okolica točke $\mathbf{p}$. Po izreku o zveznosti rešitev sistema obstaja manjša okolica U' točke $\mathbf{p}$, tako da za vsako točko $\mathbf{x} \in \Sigma \cap U'$ trajektorija $\phi_t(\mathbf{x})$ seka Σ pri nekem prvem času $T(\mathbf{x})$, ki je blizu $T(\mathbf{p})$, in velja

$$P(\mathbf{x}) := \phi_{T(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \in \Sigma \cap U.$$

(Trajektorija lahko seka Σ tudi pri kasnejših obhodih, seveda pa se lahko sčasoma oddalji od cikla in se več ne vrne.) Preslikava

$$P : \Sigma \cap U' \rightarrow \Sigma \cap U, \quad \mathbf{x} \mapsto P(\mathbf{x})$$

se imenuje **Poincaréjeva povratna preslikava**. Funkciji $\mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x})$ ter $\mathbf{x} \mapsto P(\mathbf{x})$ sta zvezni in tudi gladki, če je vektorsko polje gladko.

Dinamika Poincaréjeve preslikave in stabilnost cikla

Za vsako naravno število $k \in \mathbb{N}$ označimo s P^k k -ti iterat preslikave P :

$$P^k = \overbrace{P \circ P \circ \dots \circ P}^k.$$

Izrek

Če je točka $\mathbf{p} \in C$ na ciklu C stabilna negibna točka zaporedja iteratov $\{P^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (to je, za vsako okolico U točke $\mathbf{p}$ obstaja manjša okolica $\mathbf{p} \in U' \subset U$, tako da za vsak $\mathbf{x} \in \Sigma \cap U'$ velja $P^k(\mathbf{x}) \in U$ za vse $k \in \mathbb{N}$), potem je C stabilen cikel.

Če je $\mathbf{p}$ privlačna negibna točka preslikave P (to je, za vse $\mathbf{x} \in \Sigma$ blizu $\mathbf{p}$ velja $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k(\mathbf{x}) = \mathbf{p}$), potem je cikel C privlačen.

Izrek je intuitivno očiten, saj je obhodni čas $T(\mathbf{x})$ zvezna funkcija točke in zato se trajektorija med enim obhodom nima časa bistveno oddaljiti od cikla C . V primeru, da je $\mathbf{p} = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k(\mathbf{x})$ se trajektorija približuje limitnemu ciklu C .

Analiza je neodvisna od izbire točke $\mathbf{p} \in C$ in transversale Σ .

Poincaréjeva preslikava pri ravninskih sistemih

Dinamični sistemi na domenah v ravnini $\mathbb{R}^2$ so posebej preprosti s stališča teorije stabilnosti. Eden od pomembnih razlogov za to je dejstvo, da vsaka Jordanova krivulja, torej homeomorfna slika krožnice v ravnini, slednjo razdeli na dve povezani komponenti:

- notranjo (omejeno), ki je difeomorfna disku, ter
- zunanjo (neomejeno), ki je difeomorfna punktiranemu disku.

To je **Jordan-Schoenfliesov izrek**.

Z njegovo pomočjo zlahka vidimo, da je Poincaréjeva povratna preslikava monotona na obeh poltrakih $\Sigma \setminus \{\mathbf{p}\} = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ transversale.

Iterati $P^k(\mathbf{x})$ se torej bodisi približujejo $\mathbf{p}$ bodisi oddaljujejo od $\mathbf{p}$, ne morejo pa oscilirati ali preiti na drugo stran Σ_- . Obnašanje je lahko različno na poltrakih Σ_+ in Σ_- : ena stran je lahko privlačna in druga odbojna.

Za točko $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ definiramo limitno množico $\omega_{\pm}(\mathbf{x})$ kot množico vseh stekališč tokovnice $\phi_t(\mathbf{x})$ v D , ko gre $t \rightarrow \pm\infty$. Vprašanje je, kaj so lahko limitne množice. Izkaže se, da v ravnini ni veliko možnosti. Naslednji izrek se dokaže s pomočjo monotonosti Poincaréjeve povratne preslikave.

Izrek Poincaré-Bendixson in Lorenzov atraktor

Izrek (Poincaré-Bendixson)

V ravninskem dinamičnem sistemu je vsaka limitna množica $\omega_{\pm}(\mathbf{x})$ enega od naslednjih tipov:

- negibna točka (ničla vektorskega polja),
- cikel (periodična orbita), ali
- posplošeni cikel.

Po drugi strani pa v sistemih na $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 3$ obstajajo zelo nenavadne limitne množice. Prvi znani tovrstni primer v literaturi je bil naslednji **Lorenzov sistem** na $\mathbb{R}^3$, ki izvira iz študija vremenskih pojavov (glej npr. G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, 2012, razdelek 8.2).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \quad (\sigma, r, b > 0).\end{aligned}$$

Pri vrednostih $r > 1$ obstaja t.i. **čuden atraktor A**, sestavljen iz neskončno mnogo razvejanih ploskev, med katerimi prehajajo orbite na kaotičen način, tako da je za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ limitna množica $\omega_{+}(\mathbf{x}) = A$.