

Analiza 3

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

4. poglavje: Variacijski račun

V tem in naslednjih predavanjih obravnavamo osnove variacijskega računa.

Problem je naslednji. Dan je predpis $\mathcal{L}$, ki vsaki zvezno odvedljivi funkciji $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ na dani domeni, npr. na zaprtem intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, priredi število $\mathcal{L}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, ki je odvisna od funkcije $\mathbf{x}(t)$. Tak predpis se imenuje **funkcional** na danem prostoru funkcij; $\mathcal{L}$ je torej "funkcija na funkcijah".

Zanima nas, kako bi poiskali funkcije, pri katerih funkcional $\mathcal{L}$ zavzame ekstremno vrednost, to je (lokalni ali globalni) minimum ali maksimum.

Primer 1: Poišči zvezno odvedljive poti

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, 1],$$

z danima vrednostima $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{b}$, ki imajo najmanjšo dolžino

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dots + \dot{x}_n(t)^2} dt.$$

Rešitev poznamo: to so monotone parametrizacije daljice od **a** do **b**.

Ideja: redukcija na iskanje ekstremov funkcij ene spremenljivke

Naj bo $\mathbf{h}(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t))$, $t \in [0, 1]$, poljubna zvezno odvedljiva vektorska funkcija z robnima vrednostima $\mathbf{h}(0) = \mathbf{h}(1) = \mathbf{0}$. Oglejmo si družino poti

$$\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{x}(t, s) = \mathbf{x}(t) + s \mathbf{h}(t), \quad t \in [0, 1], \quad s \in \mathbb{R}.$$

Očitno velja $\mathbf{x}_s(0) = \mathbf{a}$, $\mathbf{x}_s(1) = \mathbf{b}$ za vsak $s \in \mathbb{R}$.

Če ima pot $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}(t)$ najmanjšo dolžino med vsemi bližnjimi potmi, ima skalarna funkcija $\mathbb{R} \ni s \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{x}_s) \in \mathbb{R}$ lokalni minimum pri $s = 0$ in zato je

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(\mathbf{x}_s) = 0.$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_s) = \int_0^1 \|\dot{\mathbf{x}}(t) + s \dot{\mathbf{h}}(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^2 + 2s \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{h}}(t) + s^2 \|\dot{\mathbf{h}}(t)\|^2} dt.$$

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(\mathbf{x}_s) = \int_0^1 \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{h}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} dt = 0.$$

Ta identiteta mora veljati za vse gladke funkcije $\mathbf{h}(t)$ z robnima vrednostima 0.

Da bi problem poenostavili, se spomnimo, da je dolžina poti neodvisna od izbire parametrizacije. Če pot parametriziramo z naravnim parametrom, je $\|\dot{\mathbf{x}}\| \equiv 1$. V tem primeru potrebujemo interval $[0, \mathcal{L}(\mathbf{x})]$ oziroma, če reparametriziramo nazaj na $[0, 1]$, je $\|\dot{\mathbf{x}}\| \equiv \mathcal{L}(\mathbf{x})$ konstantna.

Sedaj zgornji integral brez te konstante integrirajmo per partes in upoštevajmo $\mathbf{h}(0) = \mathbf{h}(1) = 0$:

$$\int_0^1 \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{h}}(t) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \dot{x}_j(t) \dot{h}_j(t) dt = - \int_0^1 \sum_{j=1}^n \ddot{x}_j(t) h_j(t) dt = 0.$$

To velja za vse zvezne odvedljive funkcije $\mathbf{h}$ z $\mathbf{h}(0) = \mathbf{h}(1) = 0$.

Odtod sledi

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = 0 \quad \text{za vse } t \in [0, 1].$$

To pomeni, da je hitrost $\dot{\mathbf{x}}(t)$ konstantna, zato je $\mathbf{x}(t)$ linearna parametrizacija daljice od $\mathbf{x}(0)$ do $\mathbf{x}(1)$.

To sledi iz naslednje trditve, ki jo bomo v nadaljevanju večkrat uporabili.

Variacijska lema

Lemma

Naj bo $\mathbf{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ zvezna pot na $[a, b] \in \mathbb{R}^n$, tako da za vsako gladko pot $\mathbf{h}(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ s $\mathbf{h}(a) = \mathbf{h}(b) = \mathbf{0}$ velja

$$\int_a^b \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{h}(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n g_i(t) h_i(t) dt = 0.$$

Potem je $\mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{0}$.

Dokaz Če izberemo vse funkcije h_i razen ene enake nič, vidimo, da zadošča dokazati trditev v primeru $n = 1$.

Denimo, da zvezna funkcija $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ni identično enaka nič. Izberimo točko $t_0 \in (a, b)$, tako da $g(t_0) \neq 0$. Recimo, da je $g(t_0) > 0$. Zaradi zveznosti obstaja interval $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [a, b]$, tako da je $g(t) > 0$ za vsak $t \in I$.

Izberimo gladko funkcijo $h(t) \geq 0$ tako, da je $h(t_0) > 0$ in je $h(t) = 0$ za vsak $t \in [a, b] \setminus I$. Potem je $g(t)h(t) \geq 0$ na $[a, b]$ in $g(t_0)h(t_0) > 0$, zato $\int_a^b g(t)h(t)dt > 0$, kar je v protislovju s predpostavko. Analogen sklep lahko naredimo, če je $g(t_0) < 0$, tako da izberemo $h(t) \leq 0$ in $h(t_0) < 0$.

Druga varianta zaključka dokaza

Povrnimo se za trenutek k identiteti

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(\mathbf{x}_s) = \int_0^1 \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{h}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} dt = 0,$$

ki mora veljati za vse gladke funkcije $\mathbf{h}(t)$ z robnima vrednostima 0.

Namesto da najprej reparametriziramo pot z naravnim parametrom in s tem dosežemo, da je dolžina $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|$ konstantna, lahko sklepamo tudi takole. Iz variacijske leme sledi, da je

$$\frac{\dot{x}_i(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = C_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Če pišemo $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^n$, to pomeni

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{C} \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|, \quad t \in [0, 1].$$

Smer hitrostnega vektorja je torej neodvisna od t , zato je pot $\mathbf{x}(t)$ parametrizacija daljice, usmerjene z vektorjem $\mathbf{C}$.

Osnovna naloga variacijskega računa

Sedaj si oglejmo splošnejši problem te vrste. Opazovali bomo funkcije na $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$; ista analiza velja na kateremkoli kompaktnem intervalu v $\mathbb{R}$.

Označimo s $\mathcal{C}^1(I)$ vektorski prostor vseh zvezno odvedljivih funkcij $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ in ga opremimo z normo

$$\|x\| = \max_{t \in I} |x(t)| + \max_{t \in I} |\dot{x}(t)|$$

in prirejeno metriko $d(x, y) = \|x - y\|$. Preveri, da je to zares norma:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \|cx\| = |c| \cdot \|x\| \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Prostor $\mathcal{C}^1(I)$ s to normo in metriko je **poln**, to je, vsako Cauchyjevo zaporedje konvergira. (Zakaj?)

Poln normiran vektorski prostor se imenuje **Banachov prostor**.

Lagrangejevo jedro in funkcional

Naj bo L neka dvakrat zvezno odvedljiva realna funkcija na $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$. Vsako funkciji $x \in \mathcal{C}^1(I)$ priredimo število

$$\mathcal{L}(x) = \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \in \mathbb{R}.$$

Funkcijo $\mathcal{L} : \mathcal{C}^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ imenujemo **Lagrangejev funkcional z jedrom L** .

Osnovna naloga: Fiksirajmo števili $a, b \in \mathbb{R}$ in označimo

$$D(a, b) = \{x \in \mathcal{C}^1(I) : x(0) = a, x(1) = b\}.$$

Poišči ekstreme Lagrangejevega funkcionala $\mathcal{L} : D(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, torej funkcije $x \in D(a, b)$, pri katerih ima $\mathcal{L}$ lokalni minimum ali lokalni maksimum.

Za vsak par funkcij $x, y \in D(a, b)$ je njuna razlika $v = y - x \in D(0, 0)$, torej $v(0) = v(1) = 0$. Velja tudi obratno:

$$x \in D(a, b), \quad v \in D(0, 0) \implies x + v \in D(a, b).$$

Stacionarna točka Lagrangejevega funkcionala

Izberimo $v \in D(0, 0)$ in si za neko $x \in D(a, b)$ oglejmo skalarno funkcijo

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto \mathcal{L}(x + sv) = \int_0^1 L(t, x(t) + sv(t), \dot{x}(t) + s\dot{v}(t)) dt \in \mathbb{R}.$$

Če je $x \in D(a, b)$ ekstremalna funkcija za $\mathcal{L}$ (lokalni maksimum ali minimum), potem je število $s = 0$ stacionarna točka funkcije $s \mapsto \mathcal{L}(x + sv)$, torej velja

$$(\nabla_v \mathcal{L})(x) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(x + sv) = 0.$$

To je **smerni odvod ali prva variacija funkcionala $\mathcal{L}$ v točki $x \in D(a, b) \subset \mathcal{C}^1(I)$ v smeri tangentnega vektorja $v \in D(0, 0)$** .

Definicija

Točka $x \in D(a, b)$, v kateri velja $(\nabla_v \mathcal{L})(x) = 0$ za vse $v \in D(0, 0)$, se imenuje **stacionarna točka funkcionala $\mathcal{L} : D(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$** .

Euler-Lagrangejeva enačba

Sedaj bomo izpeljali diferencialno enačbo za stacionarne točke. Velja:

$$\begin{aligned}(\nabla_v \mathcal{L})(x) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(t, x(t) + sv(t), \dot{x}(t) + s\dot{v}(t)) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} L(t, x(t), \dot{x}(t)) v(t) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{v}(t) \right) dt.\end{aligned}$$

Oznaki $\partial/\partial x$ in $\partial/\partial \dot{x}$ pomenita parcialna odvoda funkcije L po spremenljivkah, ki ju zasedata $x(t)$ in $\dot{x}(t)$. V nadaljevanju označimo te odvode z L_x in $L_{\dot{x}}$.

Denimo sedaj, da sta funkciji x in L razreda $\mathcal{C}^2$. Tedaj je $L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$ zvezno odvedljiva po t in lahko drugi člen na desni strani integriramo per partes. Upošteva je robne pogoje $v(0) = v(1) = 0$ dobimo

$$\int_0^1 L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{v}(t) dt = - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) v(t) dt.$$

Formula za smerni odvod je torej

$$(\nabla_v \mathcal{L})(x) = \int_0^1 \left(L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial}{\partial t} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) v(t) dt.$$

Euler-Lagrangejeva enačba

Videli smo, da ob predpostavki $x \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ in $L \in \mathcal{C}([0, 1] \times \mathbb{R}^2)$ velja

$$(\nabla_v \mathcal{L})(x) = \int_0^1 \left(L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) v(t) dt$$

Če velja $(\nabla_v \mathcal{L})(x) = 0$ za vse $v \in D(0, 0)$, je funkcija pod integralom identično enaka 0 po variacijski lemi. S tem smo dokazali:

Izrek (L. Euler 1744; J.-L. Lagrange 1760)

Funkcija $x \in D(a, b) \subset \mathcal{C}^2(I)$ je stacionarna točka Lagrangejevega funkcionala $\mathcal{L}(x) = \int_I L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$ na $D(a, b)$ natanko tedaj, ko velja

$$L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad t \in I.$$

Ta diferencialna enačba 2. reda se imenuje **Euler-Lagrangejeva enačba**. Vsak lokalni ekstrem funkcionala $\mathcal{L}$ zadošča tej enačbi.

Eksplíciten zapis Euler-Lagrangejeve enačbe

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) &= L_{t\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ &\quad + L_{x\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) + L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\ddot{x}(t)\end{aligned}$$

Euler-Lagrangejeva enačba:

$$\begin{aligned}L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\ddot{x}(t) + L_{x\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) \\ + L_{t\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) - L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad t \in I.\end{aligned}$$

Okrajšano:

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \dot{x})\ddot{x} + L_{x\dot{x}}(t, x, \dot{x})\dot{x} + L_{t\dot{x}}(t, x, \dot{x}) - L_x(t, x, \dot{x}) = 0.$$

Tehnična težava

Dobljen rezultat ni povsem zadovoljiv, saj smo morali za njegovo veljavnost predpostaviti, da sta funkciji x in L razreda $\mathcal{C}^2$, osnovni problem pa je zastavljen za funkcije, ki so le razreda $\mathcal{C}^1$. V tem primeru ne moremo integrirati drugega člena v vsoti za $(\nabla_v \mathcal{L})(x)$ per partes, saj je funkcija $\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t, x(t), \dot{x}(t))$ samo zvezna v t , ne pa tudi odvedljiva.

Vrnimo se na osnovno formulo za smerni odvod funkcionala $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}(\nabla_v \mathcal{L})(x) &= \int_0^1 \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(t, x(t) + sv(t), \dot{x}(t) + s\dot{v}(t)) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} L(t, x(t), \dot{x}(t)) v(t) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{v}(t) \right) dt.\end{aligned}$$

Radi bi videli, da je v primeru, ko je $(\nabla_v \mathcal{L})(x) = 0$ za vse $v \in D(0, 0)$ (torej je x stacionarna točka funkcionala $\mathcal{L}$) funkcija $\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t, x(t), \dot{x}(t))$ dejansko zvezno odvedljiva po t in zato x zadošča Euler-Lagrangejevi enačbi.

Ta sklep je pravilen, kot sledi iz naslednje leme.

Splošnejša variacijska lema

Lemma (P. du Bois-Reymond, 1879; A. Razmadze, 1921)

Naj bosta f in g zvezni funkciji na $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, za kateri velja

$$\int_a^b (f(t)v(t) + g(t)\dot{v}(t))dt = 0$$

za vsako funkcijo $v \in \mathcal{C}^1(I)$, ki zadošča $v(a) = v(b) = 0$. Tedaj je g zvezno odvedljiva in velja $f = \dot{g}$. (Obratno, pri $f = \dot{g}$ je integral enak $\int_a^b d(gv) = 0$.)

Dokaz Lahko vzamemo $I = [0, 1]$.

Najprej si oglejmo poseben primer $f = 0$. Naj bo $c = \int_0^1 g(t)dt$. Tedaj je

$$\int_0^1 (g(t) - c)\dot{v}(t)dt = \int_0^1 g(t)\dot{v}(t)dt - c \int_0^1 \dot{v}(t)dt = 0.$$

Če definiramo

$$v(t) = \int_0^t (g(s) - c)ds,$$

je $v(0) = 0$, $v(1) = 0$, $\dot{v}(t) = g(t) - c$ in zato

$$\int_0^1 (g(t) - c)^2 dt = 0 \implies g(t) = c \text{ za vsak } t \in I \implies \dot{g} = 0 = f.$$

Splošni primer

Definirajmo funkcijo

$$h(t) = \int_0^t f(s) ds, \quad \dot{h}(t) = f(t).$$

Z integracijo prvega člena per partes dobimo

$$\int_0^1 f(t)v(t)dt = \int_0^1 \dot{h}(t)v(t)dt = - \int_0^1 h(t)\dot{v}(t)dt$$

in zato

$$0 = \int_0^1 (f(t)v(t) + g(t)\dot{v}(t))dt = \int_0^1 (g(t) - h(t))\dot{v}(t)dt$$

za vsako funkcijo $v \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, ki zadošča $v(0) = v(1) = 0$. Iz posebnega primera zaključimo, da je $g(t) - h(t)$ konstanta, zato je

$$\dot{g}(t) = \dot{h}(t) = f(t).$$

Euler-Lagrangejeva enačba za vektorske funkcije

Povsem analogno izpeljemo naslednji Euler-Lagrangejev izrek za vektorske funkcije.

Izrek (L. Euler, J.-L. Lagrange 1760)

Naj bo L funkcija razreda $\mathcal{C}^1$ na $I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, kjer je I kompakten interval v $\mathbb{R}$. Funkcija $\mathbf{x} \in D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ je stacionarna točka Lagrangejevega funkcionala

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \int_I L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt$$

natanko tedaj, ko velja

$$L_{x_i}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) - \frac{\partial}{\partial t} L_{\dot{x}_i}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = 0, \quad t \in I, \quad i = 1, \dots, n.$$

To je sistem n navadnih diferencialnih enačb drugega reda za funkcijo $\mathbf{x}(t)$.

Za identifikacijo lokalnih ekstremov ter njihovega tipa je potrebno obravnavati **drugo variacijo** funkcionala $\mathcal{L}$.

Variacije splošnejšega tipa

Do sedaj smo obravnavali linearne variacije dane funkcije $x(t)$, torej variacije oblike

$$(t, s) \mapsto x(t) + s v(t), \quad s \in \mathbb{R},$$

kjer je $v(t)$ funkcija z vrednostjo 0 v krajiščih intervala.

Lahko bi opazovali splošnejše variacije

$$x(t, s) = x(t) + s v(t) + o(s), \quad v(t) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} x(t, s), \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{o(s)}{s} = 0,$$

kjer sta števili $x(a, s)$ in $x(b, s)$ neodvisni od s v krajiščih a, b intervala I .

Vendar se iz izpeljave vidi, da je število

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(x(\cdot, s)) = \int_I \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(t, x(\cdot, s), \dot{x}(\cdot, s)) dt$$

odvisno le od linearnega člena $v(t)$ v deformaciji $x(t, s)$, torej enako $\nabla_v \mathcal{L}(x)$. Zato takih splošnejših deformacij ni potrebno obravnavati.

Nadalje se je v raznih geometrijskih problemih mogoče brez škode za splošnost omejiti na bolj posebne deformacije. Npr., če opazujemo dolžino imerzirane poti $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, je dovolj opazovati deformacije v smereh $v(t)$, ki so v vsaki točki pravokotne na tangentni vektor $\dot{x}(t)$, saj tangentna komponenta prispeva le k reparametrizaciji poti in ne vpliva na rešitev problema.

Lagrangiani posebnega tipa

Prvi poseben primer je Lagrangian oblike

$$L(t, \dot{\mathbf{x}}) \quad (\text{neodvisen od } \mathbf{x})$$

V tem primeru je $L_x = 0$ in Euler-Lagrangejeva enačba $L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0$ se reducira na

$$L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{C} \in \mathbb{R}^n.$$

Tak primer smo imeli pri iskanju poti najmanjše dolžine med dvema točkama v $\mathbb{R}^n$ v evklidski metriki, kjer je

$$L(t, \dot{\mathbf{x}}) = \|\dot{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \cdots + \dot{x}_n^2}$$

in

$$L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \dot{\mathbf{x}}(t)) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = \mathbf{C} \in \mathbb{R}^n.$$

Lagrangian $L(x, \dot{x})$, neodvisen od t

V tem primeru se Euler-Lagrangejeva enačba $L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0$ reducira na **Beltramijevo identiteto**

$$L - \dot{x}L_{\dot{x}} = C \in \mathbb{R}.$$

To vidimo iz naslednjega računa:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(L(x, \dot{x}) - \dot{x}L_{\dot{x}}(x, \dot{x})) &= L_x\dot{x} + L_{\dot{x}}\ddot{x} - \ddot{x}L_{\dot{x}} - \dot{x}\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} \\ &= \dot{x}\left(L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}\right).\end{aligned}$$

Če velja Euler-Lagrangejeva enačba $L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0$, dobimo

$$\frac{d}{dt}(L - \dot{x}L_{\dot{x}}) = 0$$

in je zato $L - \dot{x}L_{\dot{x}}$ konstanta.

Obratno, če je $L - \dot{x}L_{\dot{x}}$ konstanta in ima množica $\{t \in [0, 1] : \dot{x} = 0\}$ prazno notranjost (kar velja v vseh naravnih primerih, kjer je x kandidat za ekstrem), sledi Euler-Lagrangejeva enačba $L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0$.