Vektorski prostori 1.del

Definicija vektorskega prostora

Definicija vektorskega prostora

Vektorski prostor nad poljem $(F, \oplus, \odot)$ je podan s tremi podatki:

(1) neprazno množico V,

(2) tako operacijo $+$ na V, da je $(V, +)$ Abelova grupa,

(3) tako preslikavo $\cdot\colon F \times V \to V$, da velja:

  (i) $\alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$ za vse $\alpha \in F$ in $u, v \in V$,

  (ii) $(\alpha \oplus \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) + (\beta \cdot v)$ za vse $\alpha, \beta \in F$ in $v \in V$,

  (iii) $(\alpha \odot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ za vse $\alpha, \beta \in F$ in $v \in V$,

  (iv) $1 \cdot v = v$ za vse $v \in V$.

Opomba: Elementom množice V pravimo **vektorji**. Elementom množice F pravimo **skalarji**. Operaciji $+$ pravimo **vsota vektorjev**. Funkciji $\cdot$ pravimo **produkt vektorja s skalarjem**.

Opomba: Namesto $\alpha \oplus \beta$ bomo pisali kar $\alpha + \beta$. Namesto $\alpha \odot \beta$ bomo pisali kar $\alpha\beta$. Namesto $\alpha \cdot v$ bomo pisali kar αv. Produkt vektorja s skalarjem naj ima višjo prioriteto kot vsota vektorjev (manj oklepajev).

Opomba: Če v definiciji vektorskega prostora privzamemo samo, da je F kolobar, potem dobimo definicijo **modula**.

Vektorski prostor nad poljem F lahko definiramo tudi kot Abelovo grupo $(V, +)$ skupaj z homomorfizmom kolobarjev z enoto iz F v $\mathrm{End}(V, +)$, kjer je $\mathrm{End}(V, +)$ kolobar endomorfizmov Abelove grupe $(V, +)$.

Pokažimo zdaj, da sta obe definiciji ekvivalentni. Za vsak $\alpha \in F$ naj bo

$$\phi_\alpha \colon V \to V, \quad \phi_\alpha(v) := \alpha v.$$

Po lastnosti (i) je

$$\phi_\alpha(u + v) = \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v = \phi_\alpha(u) + \phi_\alpha(v),$$

torej je ϕ_α endomorfizem Abelove grupe $(V, +)$. Oglejmo si preslikavo

$$\Phi \colon F \to \mathrm{End}(V, +), \quad \Phi(\alpha) := \phi_\alpha.$$

Pokažimo, da je Φ homomorfizem kolobarjev z enoto.

Za vsaka $\alpha, \beta \in F$ in za vsak $v \in V$ po lastnostih (ii)-(iv) velja

$$\Phi(\alpha+\beta)(v) = (\alpha+\beta)v = \alpha v+\beta v = \Phi(\alpha)(v)+\Phi(\beta)(v) = (\Phi(\alpha)+\Phi(\beta))(v)$$
$$\Phi(\alpha\beta)(v) = (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) = \Phi(\alpha)(\Phi(\beta)(v)) = (\Phi(\alpha) \circ \Phi(\beta))(v)$$
$$\Phi(1)(v) = 1v = v = \mathrm{id}(v)$$

torej je $\Phi(\alpha + \beta) = \Phi(\alpha) + \Phi(\beta)$, $\Phi(\alpha\beta) = \Phi(\alpha) \circ \Phi(\beta)$ in $\Phi(1) = \mathrm{id}$.

Pokažimo še obratno. Naj bo $\Phi\colon F \to \mathrm{End}(V, +)$ homomorfizem kolobarjev z enoto. Za vsaka $\alpha \in F$ in $v \in V$ definirajmo

$$\alpha v := \Phi(\alpha)(v)$$

Ker je $\Phi(\alpha)$ endomorfizem Abelove grupe $(V, +)$, velja

$$\alpha(u + v) = \Phi(\alpha)(u + v) = \Phi(\alpha)(u) + \Phi(\alpha)(v) = \alpha u + \alpha v.$$

Ker je Φ homomorfizem kolobarjev z enoto, velja

$$(\alpha+\beta)v = \Phi(\alpha+\beta)(v) = (\Phi(\alpha)+\Phi(\beta))(v) = \Phi(\alpha)(v)+\Phi(\beta)(v) = \alpha v+\beta v$$
$$(\alpha\beta)v = \Phi(\alpha\beta)(v) = (\Phi(\alpha) \circ \Phi(\beta))(v) = \Phi(\alpha)(\Phi(\beta)(v)) = \alpha(\beta v)$$
$$1v = \Phi(1)(v) = \mathrm{id}(v) = v$$

Primeri vektorskih prostorov

Oglejmo si najprej naš standardni primer.

Primer: Vektorski prostor F^n

Naj bo F polje in n naravno število. Označimo z F^n množico vseh n-teric elementov iz F. Vsota dveh vektorjev in produkt vektorja s skalarjem naj bosta definirana po komponentah.

$$(\alpha_1,,\ldots,\alpha_n)+(\beta_1,\ldots,\beta_n):=(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n)$$
$$\gamma(\alpha_1,\ldots,\alpha_n):=(\gamma\alpha_1,\ldots,\gamma\alpha_n)$$

Potem je F^n vektorski prostor nad F.

Opomba: Pri $n=1$ dobimo, da je F vektorski prostor nad F.

Primer: Vektorski prostor $M_{m,n}(F)$

Naj bo F polje in naj bosta m in n naravni števili. Označimo z $M_{m,n}(F)$ množico vseh $m \times n$ matrik z elementi iz F. Definirajmo vsoto dveh matrik in produkt matrike s skalarjem na običajen način, se pravi po komponentah. Potem je $M_{m,n}(F)$ vektorski prostor nad F.

Oglejmo si še posplošitev obeh prejšnjih primerov.

Primer: Vektorski prostor F^S

Naj bo F polje in naj bo S neprazna množica. Množico vseh funkcij iz S v F označimo z F^S. Vsota funkcij je definirana po elementih:

$$(f+g)(s) := f(s) + g(s)$$

Tudi produkt funkcije s skalarjem je definiran po elementih

$$(\gamma f)(s) := \gamma f(s)$$

Potem je F^S vektorski prostor.

Opomba: Če je $S = \{1, \ldots, n\}$ potem lahko F^S identificiramo s F^n. Če je $S = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ potem lahko F^S identificiramo s $M_{m,n}(F)$.

Primer: Trivialni vektorski prostor nad F

Množica $V = \{0\}$ je vektorski prostor nad poljem F. Vsota vektorjev je definirana z $0 + 0 = 0$. Produkt vektorja s skalarjem je definiran z $\alpha 0 = 0$.

Primer: Vektorski prostor polinomov

Naj bo F polje in naj bo $F[x]$ množica vseh polinomov v spremenljivki x s koeficienti iz F. Vsoto dveh polinomov in produkt polinoma s skalarjem definiramo na običajen način. Potem je $F[x]$ vektorski prostor nad F.

Primer: Razširitev polj

Če je F podpolje polja K, potem je K vektorski prostor nad F za običajno vsoto na K in običajen produkt na K. (Funkcija iz $F \times K$ v K je skrčitev operacije množenja, ki je funkcija iz $K \times K$ v K.)

Opomba: Ker je polje F podpolje polja racionalnih funkcij $F(x)$, je $F(x)$ vektorski prostor nad F.

Primer: Direktna vsota vektorskih prostorov

Naj bo F polje in naj bodo $V_1, \ldots, V_k$ vektorski prostori nad F. Označimo z $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ množico vseh k-teric $(v_1, \ldots, v_k)$, kjer $v_i \in V_i$ za vse i. Vsota dveh k-teric in produkt k-terice s skalarjem sta definirana po komponentah. Potem je $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ vektorski prostor nad F.

Vektorski podprostori

Definicija vektorskega podprostora

Naj bo V vektorski prostor nad poljem F. Neprazna podmnožica $U \subseteq V$ je **vektorski podprostor** v V, če velja:

- Za vsaka $u_1, u_2 \in U$ velja $u_1 + u_2 \in U$.
- Za vsak $u \in U$ in vsak $\alpha \in F$ velja $\alpha u \in U$.

Opomba: Vsak vektorski podprostor vsakega vektorskega prostora nad F je spet vektorski prostor nad F. (Vsoto dveh vektorjev v U izračunamo kot v V. Tudi produkt vektorja iz U s skalarjem izračunamo kot v V.)

Trditev

Vsak vektorski podprostor vsebuje ničelni vektor.

Dokaz: Naj bo V vektorski podprostor nad F. Enoto Abelove grupe V označimo z 0_V. Naj bo U vektorski podprostor v V in naj bo u poljuben element U. Po drugi lastnosti iz definicije vektorskega podprostora velja $0u \in U$. Iz $0_V + 0u = 0u = (0+0)u = 0u + 0u$ sledi $0_V = 0u \in U$.

Opomba: Če je W vektorski podprostor v V in če je U vektorski podprostor v W, potem je U vektorski podprostor v V.

Naslednja trditev nam da alternativno definicijo vektorskega podprostora.

Trditev

Naj bo V vektorski prostor nad poljem F. Neprazna podmnožica $U \subseteq V$ je **vektorski podprostor** v V natanko tedaj, ko za vsaka $u_1, u_2 \in U$ in vsaka $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ velja $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$.

Dokaz: Najprej dokažimo da ima vsak vektorski podprostor $U \subseteq V$ lastnost iz trditve. Vzemimo $u_1, u_2 \in U$ in $\alpha_1, \alpha_2 \in F$. Ker je U zaprta za množenje s skalarji, velja $\alpha_1 u_1 \in U$ in $\alpha_2 u_2 \in U$. Ker je U zaprta za seštevanje, odtod sledi $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$.

Dokažimo še, da je vsaka podmnožica $U \subseteq V$, ki zadošča lastnosti iz trditve, vektorski podprostor v V. Za vsaka $u_1, u_2 \in U$ je po lastnosti iz trditve $1u_1 + 1u_2 \in U$. Torej je U zaprta za seštevanje. Za vsak $u \in U$ in vsak $\alpha \in F$ je po lastnosti iz trditve $\alpha u + 0u \in U$. Torej je U zaprta za množenje s skalarjem.

Trditev

Naj bodo $U_1, \ldots, U_k$ podprostori vektorskega prostora V. Potem velja:

- Njihov presek $U_1 \cap \ldots \cap U_k$ je vektorski podprostor v V.
- Njihova vsota $U_1 + \ldots + U_k$ je vektorski podprostor v V. (To je množica vseh vektorjev $u_1 + \ldots + u_k$, kjer $u_i \in U_i$ za vsak i.)

Dokaz za presek: Vzemimo $w, z \in U_1 \cap \ldots \cap U_k$ in $\alpha, \beta \in F$. Radi bi dokazali, da $\alpha w + \beta z \in U_1 \cap \ldots \cap U_k$. Za vsak $i = 1, \ldots, k$ je U_i tak podprostor v V, ki vsebuje tako w kot z, torej vsebuje tudi $\alpha w + \beta z$. Ker $\alpha w + \beta z$ leži v vseh U_i, leži tudi v preseku.

Dokaz za vsoto: Vzemimo $w, z \in U_1 + \ldots + U_k$ in $\alpha, \beta \in F$. Radi bi dokazali, da $\alpha w + \beta z \in U_1 + \ldots + U_k$. Po definiciji vsote podprostorov lahko w in z izrazimo kot $w = w_1 + \ldots + w_k$ in $z = z_1 + \ldots + z_k$, kjer $w_i, z_i \in U_i$ za vsak $i = 1, \ldots, k$. Ker so vsi U_i podprostori v V velja $\alpha w_i + \beta z_i \in U_i$ za vsak $i = 1, \ldots, k$. Odtod sledi

$$\alpha w + \beta z = (\alpha w_1 + \beta z_1) + \ldots + (\alpha w_k + \beta z_k) \in U_1 + \ldots + U_k.$$

Primeri vektorskih podprostorov

Primer: Trivialni in nepravi vektorski podprostor

Če je V vektorski prostor nad F, potem sta $\{0\}$ in V vedno vektorska podprostora v V. Prvemu pravimo **trivialni vektorski podprostor**, drugemu pa **nepravi vektorski podprostor**.

Če je $V = F$ sta to edina vektorska podprostora v V. Vsak netrivialen vektorski podprostor U v F namreč vsebuje neničeln element $\alpha \in F$. Potem za vsak $\beta \in F$ velja $\beta = (\beta\alpha^{-1})\alpha \in U$. Torej je $U = F$.

Primer: Vektorski podprostori v F^2

Naj bo F polje in $u \in F^2$. Množica $U := \{\alpha u \mid \alpha \in F\}$ je očitno zaprta za seštevanje in množenje s skalarjem, torej je vektorski podprostor v F^2.

Pokažimo, da je U pravi vektorski podprostor. Če $U = F^2$, bi obstajala taka $\alpha_1, \alpha_2 \in F$, da bi veljalo $(1,0) = \alpha_1 u$ in $(0,1) = \alpha_2 u$. Odtod bi sledilo, da je $\alpha_2(1,0) = \alpha_1(0,1)$, se pravi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, kar da protislovje.

Naloga: Pokažite, da smo dobili vse prave vektorske podprostore v F^2.

Primer: Množica rešitev homogenega sistema linearnih enačb

Naj bo A $m \times n$ matrika z elementi iz F. Množico vseh n-teric $\mathbf{x} \in F^n$, ki rešijo homogeni sistem linearnih enačb $A\mathbf{x} = 0$ označimo z $\mathrm{Ker}\, A$ in ji pravimo **jedro** matrike A. Vemo, da je $\mathrm{Ker}\, A$ vektorski podprostor v F^n.

Primer: Matrični prostori

Naj bo $V = M_n(F)$ vektorski prostor $n \times n$ matrik. Naslednje podmnožice v V so vektorski podprostori v V.

- Vse simetrične matrike. (Matrika A je **simetrična**, če je $A^T = A$.)
- Vse antisimetrične matrike. (A je **antisimetrična**, če $A^T = -A$.)
- Vse matrike X, ki zadoščajo enačbi $A_1XB_1 + \ldots + A_kXB_k = 0$.
- Vse matrike, ki imajo sled enako nič.
- Vse matrike, ki imajo ničle na predpisanih mestih $(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)$. (Npr. vse diagonalne matrike, vse zgornje trikotne matrike, vse matrike z ničelnim prvim stolpcem, vse matrike z $a_{1,n} = 0$, itd.)

Primer: Prostori polinomov in racionalnih funkcij

Naj bo F polje. Množica vseh polinomov $F[x]$ je vektorski podprostor v vektorskem prostoru $F(x)$ vseh racionalnih funkcij. Množica $F[x]_{\leq n}$ vseh polinomov stopnje $\leq n$ je vektorski podprostor v vektorskem prostoru $F[x]$.

Primer: Funkcijski prostori

Naj bo $V = \mathbb{R}^{[a,b]}$ vektorski prostor vseh funkcij iz intervala $[a, b]$ v $\mathbb{R}$. Naslednje podmnožice v V so vektorski podprostori v V:

- Vse omejene funkcije.
- Vse integrabilne funkcije.
- Vse zvezne funkcije.
- Vse odvedljive funkcije.
- Vse dvakrat odvedljive funkcije $y(x)$, ki rešijo dano homogeno linearno diferencialno enačbo 2. reda $p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0$.
- Vse funkcije, ki zadoščajo $f(a) = 0$.
- Vse funkcije, ki zadoščajo $f(a) = f(b)$.

Linearna ogrinjača

Definicija linearne ogrinjače

Naj bo V vektorski podprostor nad F in naj bodo $v_1, \ldots, v_k$ elementi V. Pravimo, da je vektor $v \in V$ **linearna kombinacija** vektorjev $v_1, \ldots, v_k$, če obstajajo taki skalarji $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$, da velja $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$.

Množico vseh linearnih kombinacij vektorjev $v_1, \ldots, v_k$ označimo z $\mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_k\}$ in ji pravimo **linearna ogrinjača** množice $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

S formulo: $\mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_k\} := \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F\}$.

Trditev

Za vsako končno podmnožico S v vektorskem prostoru V je njena linearna ogrinjača $\mathrm{Lin}\, S$ vektorski podprostor v V.

Dokaz: Če $u_1, u_2 \in \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_k\}$ in $\gamma_1, \gamma_2 \in F$, potem bi radi dokazali, da $\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 \in \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_k\}$. Izberimo take skalarje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in $\beta_1, \ldots, \beta_n$, da je $u_1 = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$ in $u_2 = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k$. Sledi $\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 = (\gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \beta_1) v_1 + \ldots + (\gamma_1 \alpha_k + \gamma_2 \beta_k) v_k \in \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_k\}$.