

ANA2 IŠRM, 1.izpit

19. junij 2020

 $8^{45} - 11^{00}$ Predavalnice: 3.04,3.05

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)Dana naj bo funkcija $f : [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}] \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{2}.$$

Določi volumen vrtenine, ki jo dobimo, ko graf funkcije f zavrtimo okoli x -osi.**Rešitev:**

Volumen znaša

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\sin x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{4} - \sin x + \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \\ &= \pi \left(\frac{x}{4} + \cos x + \frac{x - \frac{1}{2} \sin 2x}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{2} - \pi \frac{3\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

2. naloga

a) (25 točk) Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$xy' + y = y^3,$$

ki zadošča pogoju $y(1) = 2$.

b) (10 točk) Izpelji diferencialno enačbo, ki ji zadošča funkcija $y(x)$ z lastnostjo, da tangenta na graf funkcije y skozi poljubno točko na grafu $(x, y(x))$ vsebuje točko $(2x, y(x)^3)$.

Rešitev:

(a) To je Bernoullijeva enačba, vstavimo $z = y^{-2}$ in dobimo enačbo

$$-\frac{x}{2}z' + z = 1.$$

Rešitev homogene enačbe je

$$z = Cx^2,$$

za variacijo konstante pa dobimo

$$C' = 2x^{-3} \rightarrow C = x^{-2}.$$

Splošna rešitev je torej

$$z = Cx^2 + 1$$

Torej je

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + Cx^2}}$$

Upoštevamo še začetni pogoj $y(1) = 2$ in dobimo

$$2 = \frac{1}{\sqrt{1 + C}} \rightarrow C = -\frac{3}{4},$$

rezultat je torej

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2}}.$$

(b) Enačba tangente je

$$Y - y = y'(X - x),$$

kjer za $X = 2x$ mora veljati $Y = y^3$. To vstavimo v enačbo tangente in dobimo pogoj

$$xy' + y = y^3.$$

3. naloga (25 točk)

Poišči vse točke $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, kjer doseže funkcija $f(x, y, z) = xyz$ ekstremno vrednost, pri pogoju, da je

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1.$$

Rešitev:

Sestavimo vezani ekstrem

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} - 1\right)$$

in dobimo za ekstrem enačbe

$$yz + \frac{\lambda}{x^2} = 0$$

$$xz + \frac{2\lambda}{y^2} = 0$$

$$yz + \frac{3\lambda}{z^2} = 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1.$$

Prvo pomnožimo z x , drugo z y in tretjo z z , seštejemo in upoštevamo četrto, da dobimo

$$\lambda = -3xyz.$$

To vstavimo nazaj v prve tri enačbe, primerno krajšamo in dobimo

$$x = 3 \quad y = 6 \quad z = 9.$$

4. naloga (25 točk)

Dana je funkcijska vrsta

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n.$$

- a) Določi konvergenčno območje dane funkcijske vrste.
(Nasvet: uporabi korenski kriterij za konvergenco vrst!)
- b) Seštej funkcijsko vrsto v notranjosti konvergenčnega območja. Odgovor utemelji!
(Nasvet: funkcijsko vrsto odvajaj!)

Rešitev:

Korenski kriterij

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \left| \frac{x-1}{x} \right|^n} = \left| \frac{x-1}{x} \right| < 1,$$

kar nam da $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$. Ko vstavimo v vrsto $x = \frac{1}{2}$ dobimo alternirajočo harmonično vrsto, ki tudi konvergira.

Torej je konvergenčno območje interval

$$[\frac{1}{2}, \infty).$$

Odvod vrste je

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{n-1},$$

kar seštejemo kot geometrijsko vrsto in dobimo

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \ln x + C.$$

Pri $x = 1$ velja $f(x) = 0$, torej je $C = 0$ in rezultat je

$$f(x) = \ln x.$$

Odvajanje je dovoljeno, saj na poljubnem intervalu (a, b) , kjer je $a > \frac{1}{2}$ vrsta $\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{n-1}$ enakomerno konvergira. Res, ocenimo lahko (denimo, da je v $x = a$ dosežena največja vrednost)

$$\left| \frac{1}{x^2} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{n-1} \right| \leq \left| \frac{1}{a^2} \left(\frac{a-1}{a} \right)^{n-1} \right|$$

in vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} \left| \left(\frac{a-1}{a} \right)^{n-1} \right|$$

konvergira (po korenskem krit.), torej po Weierstrassovem kriteriju vrsta za odvod enakomerno konvergira na (a, b) .