

ANA2 IŠRM, 2.izpit

30. junij 2020

8⁴⁵ – 11⁰⁰ Predavalnice: 2.05

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)Dana naj bo krivulja $\mathcal{K}$, parametrizirana z

$$\vec{r}(t) = (e^{2\cos t} \cos t, e^{2\cos t} \sin t) \quad t \in [0, 2\pi].$$

a) Določi vse $t \in [0, 2\pi]$ pri katerih je tangenta na krivuljo $\mathcal{K}$ vzporedna z osjo y .**b)** Določi vse $t \in [0, 2\pi]$ pri katerih sta vektorja $\vec{r}(t)$ in $\dot{\vec{r}}(t)$ pravokotna.**Rešitev:**

Velja

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= (-2 \sin t e^{2\cos t} \cos t - e^{2\cos t} \sin t, -2t \sin t e^{2\cos t} \sin t + e^{2\cos t} \cos t) = \\ &= (-e^{2\cos t}(\sin t + 2 \sin t \cos t), e^{2\cos t}(\cos t - 2 \sin^2 t)). \end{aligned}$$

Veljati mora (za navpičnost)

$$\sin t(1 + 2 \cos t) = 0 \rightarrow \sin t = 0 \quad \cos t = -\frac{1}{2}$$

kar nam da

$$t = 0, \pi, 2\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}.$$

Za pravokotnost izračunamo skalarni produkt

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = -2 \sin t e^{4\cos t}$$

in ta skalarni produkt je enak 0 za

$$t = 0, \pi, 2\pi.$$

2. naloga (25 točk)

Dana naj bo množica $M = (1, \infty) \subset \mathbb{R}$ in preslikava $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x-1} - \frac{1}{y-1} \right|.$$

a) Pokaži, da je d metrika na množici M .

b) Naj bo $x_n = \frac{2n+1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) zaporedje v M . Določi limito zaporedja (x_n) . Odgovor utemelji!

c) Naj ima množica $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ običajno Evklidsko metriko, torej $d_E(x, y) = |x - y|$. Poišči izometrijo $f : ((0, \infty), d_E) \rightarrow (M, d)$.

(Nasvet: preslikava f mora biti takšna, da za vsak $x, y \in (0, \infty)$ velja $d(f(x), f(y)) = |x - y|$)

Rešitev:

Velja $d(x, y) \geq 0$, in iz $d(x, y) = 0$ sledi $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1}$, torej sledi $x = y$.

Očitno je $d(x, y) = d(y, x)$, trikotniška neenakost pa tudi velja

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \left| \frac{1}{x-1} - \frac{1}{z-1} \right| = \left| \frac{1}{x-1} - \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-1} - \frac{1}{z-1} \right| \leq \\ &\left| \frac{1}{x-1} - \frac{1}{y-1} \right| + \left| \frac{1}{y-1} - \frac{1}{z-1} \right| = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Pogledamo

$$d(x_n, 2) = \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right| \rightarrow 0 \text{ za } n \rightarrow \infty,$$

torej je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Vzamemo pogoj iz nasveta:

$$\left| \frac{1}{f(x)-1} - \frac{1}{f(y)-1} \right| = |x - y|$$

kar bo veljalo, če vzamemo za $f(x)$ takšno funkcijo, da je

$$\frac{1}{f(x)-1} = x \Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Iskana preslikava $f : (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ je torej $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

3. naloga (25 točk)

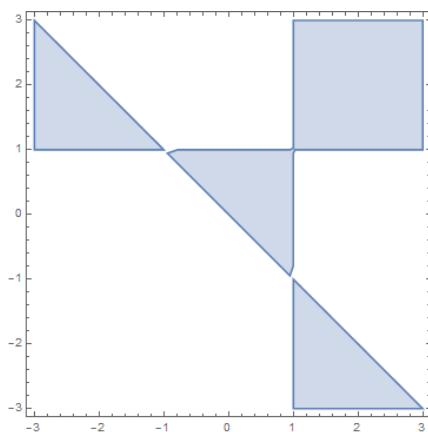
Dana je funkcija dveh spremenljivk f s predpisom

$$f(x, y) = \ln((x + y)(x - 1)(y - 1)).$$

- a) Določi in skiciraj definicijsko območje funkcije f .
b) Določi stacionarne točke funkcije f in tip ekstrema v vsaki stacionarni točki.

Rešitev:

Za definicijsko območje pogledamo kombinacije vseh treh faktorjev, ki dajejo pozitiven rezultat. Dobimo



Velja

$$f_x = \frac{2x + y - 1}{(x + y)(x - 1)} \quad f_y = \frac{x + 2y - 1}{(x + y)(y - 1)}$$

tako, da stacionarna točka zadošča

$$2x + y = 1 \quad x + 2y = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad y = \frac{1}{3}$$

kar je v def. območju. Za druge odvode dobimo

$$f_{xx} = \frac{2(x + y)(x - 1) - (2x + y - 1)^2}{(x + y)^2(x - 1)^2} \rightarrow -\frac{9}{2}$$

$$f_{xy} = \frac{(x + y)(x - 1) - (2x + y - 1)(x - 1)}{(x + y)^2(x - 1)^2} \rightarrow -\frac{9}{4}$$

$$f_{yy} = \frac{2(x + y)(y - 1) - (x + 2y - 1)^2}{(x + y)^2(y - 1)^2} \rightarrow -\frac{9}{2}$$

Determinanta Hessejeve matrike je pozitivna, $f_{xx} < 0$, torej gre za lokalni maksimum.

4. naloga (25 točk)

Dana naj bo diferencialna enačba

$$(2y + 9xy) dx + (x + 3x^2) dy = 0.$$

a) Poišči splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe, če veš, da je integrirajoči množitelj odvisen le od spremenljivke x .

b) Poišči tisto rešitev, ki gre skozi točko $(1, 1)$.

Rešitev:

Enačba ni eksaktna ($P_y \neq Q_x$). Naj bo integr. množitelj oblike $\mu(x)$ in imamo pogoj

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x$$

od koder dobimo ravno

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{x} \Rightarrow \mu = x.$$

Enačba

$$x(2y + 9xy) dx + x(x + 3x^2) dy = 0$$

je sedaj eksaktna in poiščemo $u(x, y)$, ki zadošča sistemu

$$u_x = 2xy + 9x^2y \quad u_y = x^2 + 3x^3$$

in dobimo $u(x, y) = x^2y + 3x^3y$, torej je splošna rešitev oblike

$$x^2y + 3x^3y = C \quad \rightarrow \quad y = \frac{C}{x^2 + 3x^3}.$$

Pogoj $y(1) = 1$ nam da $C = 4$, torej

$$y = \frac{4}{x^2 + 3x^3}.$$