

ANA2 IŠRM, 3.izpit

21. avgust 2020

8⁴⁵ – 11⁰⁰ Predavalnice: 2.05

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Dana je diferencialna enačba

$$y' = \frac{y}{2x + y}.$$

S pomočjo uvedbe nove funkcije

$$z = \frac{y}{x},$$

poišči tisto rešitev dane diferencialne enačbe, za katero je $y(2) = 2$.**Rešitev:**Imamo $y = xz$, kar nam da $y' = xz' + z$ in zgornja enačba postane

$$z + xz' = \frac{1}{1 + \frac{2}{z}} \Rightarrow \frac{(z+2)z'}{z(z+1)} = -\frac{1}{x}$$

z rešitvijo

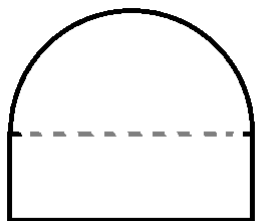
$$z = \frac{C \pm \sqrt{C^2 + 4Cx}}{2x} \Rightarrow y = \frac{C \pm \sqrt{C^2 + 4Cx}}{2}.$$

Začetni pogoj $y(2) = 2$ bo izpolnjen, če je $C = 1$ in izbran pozitiven predznak pred korenem:

$$y = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}.$$

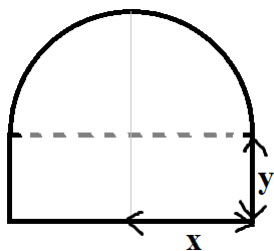
2. naloga (25 točk)

Na pravokotnik postavimo polkrog (glej sliko), tako da je obseg dobljenega lika enak ℓ . Določi obliko lika, ki ima največjo ploščino. Nalogo formuliraj in reši kot vezani ekstrem.



Rešitev:

Imejmo oznake s spodnje slike



Dobimo vezani ekstrem

$$2xy + \frac{1}{2}\pi x^2 - \lambda(2x + 2y + \pi x - \ell) \rightarrow \text{extr.}$$

Dobimo enačbe

$$2y + \pi x - 2\lambda - \lambda\pi = 0$$

$$2x - 2\lambda = 0$$

$$2x + 2y + \pi x - \ell = 0$$

od koder dobimo

$$x = y = \lambda = \frac{\ell}{4 + \pi}.$$

3. naloga (25 točk)

Dana naj bo množica realnih števil $[0, \infty)$ in preslikava

$$d : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad d(x, y) = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)|.$$

- a) Pokaži, da je $([0, \infty), d)$ metrični prostor.
- b) Pokaži, da je zaporedje $a_n = n^2$ Cauchyovo. Ali je $([0, \infty), d)$ poln metrični prostor?
- c) Ali je preslikava $f : ([0, \infty), d) \rightarrow ([0, \infty), d)$, podana s predpisom

$$f(x) = x + 1,$$

skrčitev?

Rešitev:

Trikotniška neenakost drži:

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(z)| = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y) + \operatorname{arctg}(y) - \operatorname{arctg}(z)| \leq \\ &\leq |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)| + |\operatorname{arctg}(y) - \operatorname{arctg}(z)| = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Zaporedje je Cauchyovo, saj $(m \geq n)$

$$d(a_n, a_m) = |\operatorname{arctg}(n^2) - \operatorname{arctg}(m^2)| \leq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n^2) < \epsilon$$

za $n > \sqrt{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \epsilon)}$.

Zaporedje pa ni konvergentno, saj, če bi bil $A \in [0, \infty)$ limita zaporedja, bi veljalo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{arctg}(n^2) - \operatorname{arctg}(A)| = 0,$$

ampak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{arctg}(n^2) - \operatorname{arctg}(A)| = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(A) \neq 0 \quad \forall A \in [0, \infty).$$

Če bi bila preslikava f skrčitev, bi obstajal $q \in [0, 1)$, da bi za vsak $x, y \in [0, \infty)$ veljalo

$$|\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}(y+1)| \leq q |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)|.$$

Vzemimo $x = t, y = t + 1$ in si oglejmo limito kvocienta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(t+2) - \operatorname{arctg}(t+1)}{\operatorname{arctg}(t+1) - \operatorname{arctg}(t)} = L'Hop = 1.$$

Vidimo torej, da f ni skrčitev, saj za poljuben $q \in [0, 1)$ obstaja (dovolj velik) $t \in [0, \infty)$, da za točki t in $t + 1$ velja

$$|\operatorname{arctg}(t+2) - \operatorname{arctg}(t+1)| > q |\operatorname{arctg}(t+1) - \operatorname{arctg}(t)|.$$

4. naloga (25 točk)

Dano naj bo funkcijsko zaporedje

$$f_n(x) = \frac{x(n^4x^3 + x + n)}{1 + n^4x^2}.$$

- a) Določi konvergenčno območje funkcijskega zaporedja.
- b) Proti kateri funkciji f konvergira zaporedje f_n po točkah.
- c) Ali zaporedje f_n konvergira enakomerno k funkciji f na konvergenčnem območju?

Rešitev:

Velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(n^4x^3 + x + n)}{1 + n^4x^2} = x^2$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$, tako da f_n konvergira na $\mathbb{R}$ po točkah k funkciji $f(x) = x^2$.

Velja

$$\left| \frac{x(n^4x^3 + x + n)}{1 + n^4x^2} - x^2 \right| = \frac{nx}{1 + n^4x^2}.$$

Velja

$$\left(\frac{nx}{1 + n^4x^2} \right)' = \frac{n - n^5x^2}{(n^4x^2 + 1)^2},$$

kar pomeni, da je stacionarna točka pri $x = \pm \frac{1}{n^2}$, kjer ima $\frac{nx}{1+n^4x^2}$ vrednost $\pm \frac{1}{2n}$, torej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x(n^4x^3 + x + n)}{1 + n^4x^2} - x^2 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0,$$

kar pomeni, da zaporedje f_n konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$ k funkciji $f(x) = x^2$.