

PARCIALNE DIFERENCIALNE ENACBE

Obseg = 30 ur = ~~30~~
do tednov po 3 ure/tednu

Režim: 2 kolokvija (ali pisni izpit)
+ ustni izpit

Snov: Imamo 5 poglavij:

- ① PDE 1. reda
- ② Kanonične forme za PDE 2. reda
- ③ Fourierova metoda separacije spr.
(Valoma, toplotna in Laplaceova enačba)
- ④ Laplaceove transformacije
- ⑤ Variacijski račun

• UVOD

Kaj je DE?

To je taka enačba v kateri nastopajo
neznana funkcija (lahko več spr.) in njim
(parcialni) odvodi

DE se delijo na NDE in PDE
↑ ↑
neznana neznana
funkcija funkcija
ene spr. več spr.

Splošna NDE je oblike

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0$$

Najvišja stopnja odvoda, ki nastopa je red NDE

NDE 1. reda $F(x, u(x), u'(x)) = 0$

↑ ↑ ↑
dana iščeno

NDE 2. reda $F(x, u(x), u'(x), u''(x)) = 0$

Kako je videti PDE v dveh spr.

PDE 1. reda $F(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)) = 0$

↑ ↑ = u_x = u_y
dana iščeno

PDE 2. reda $F(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)) = 0$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑
dana iščeno u u_x u_y u_{xx} u_{xy} u_{yy}

Kakšna je PDE v treh spremenljivkah

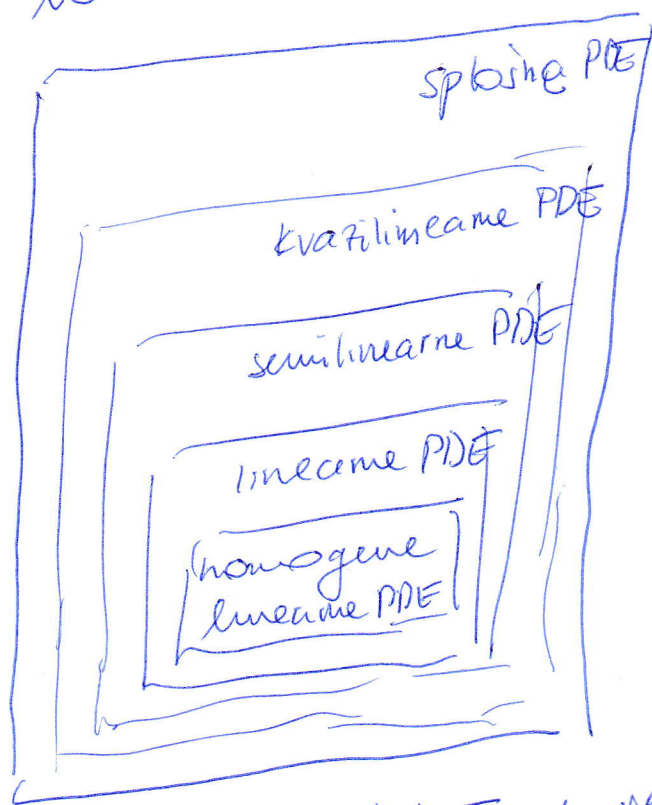
1. reda $F(x, y, z, u(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z)) = 0$

u u_x u_y u_z

2. reda $F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, \text{6 drugih parc. odvodov}) = 0$

$u_{xx}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yy}, u_{yz}, u_{zz}$

Mi bomo razpravljali samo posebne tipe PDE



Kvazilinearna PDE 1. reda v dveh spr.

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = f(x, y, u) \quad (*)$$

ker so a, b, f podatka, u pa je neznana funkcija dveh spremenljivk

Semilinearna PDE 1. reda v dveh spr.

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = f(x, y, u)$$

• Linearna PDE 1. reda v dveh spr.

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u + d(x,y)$$

Homogena linearna PDE 1. reda v dveh spr.

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$$

v treh spr.

$$a(x,y,z)u_x + b(x,y,z)u_y + c(x,y,z)u_z = 0 \quad (**)$$

Opomba (*) bom prevedli na (**) s
primerno substitucijo

Preden začnemo z reševanjem pridejo
bolj osnovne zadeve:

- preveri, da je dana funkcija resitev
dane PDE

- za dano funkcijo ^{oz. družino funkcij} poišči tisto PDE,
ki ji ta funkcija zadošča

Primer: Preveri, da funkcija $u(x,y) = x^2 + y^2$
zadošča PDE $yu_x - xu_y = 0$

$$u = x^2 + y^2$$

$$u_x = 2x$$

$$u_y = 2y$$

$$\left. \begin{array}{l} u = x^2 + y^2 \\ u_x = 2x \\ u_y = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow yu_x - xu_y = y \cdot 2x - x \cdot 2y$$

$$= 2xy - 2xy = 0$$

za vsak x in y

• Pri NDE smo navajali, da v ~~rešitvi~~
 v splošni rešitvi nastopajo še neznane
 konstante. V NDE 1. reda imamo eno
 neznano konstanto, pri NDE 2. reda pa
 imamo dve neznani konstanti v spl. rešitvi.

Kako je z neznanimi konstantami pri PDE?
 V splošni rešitvi PDE nastopajo še
 neznane funkcije

Primer: PDE: $y u_x - x u_y = 0$

$u(x, y) = f(x^2 + y^2)$, ker je f neznana
 funkcija ene spr.

Potem ji

$$u_x = f'(x^2 + y^2) \cdot 2x$$

$$u_y = f'(x^2 + y^2) \cdot 2y$$

Odtod sledi, da ji

$$y u_x - x u_y = y \cdot f'(x^2 + y^2) \cdot 2x - x \cdot f'(x^2 + y^2) \cdot 2y$$

$$= 2xy f''(x^2 + y^2) - 2xy f''(x^2 + y^2)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Nadoboma: Splošna rešitev za PDE 1. reda v m spr. vsebuje eno nemano funkcijo v $m-1$ spr.

Splošna rešitev za PDE 2. reda v m spr. vsebuje dve nemani funkciji v $m-1$ spr.

Op. $u_x^2 + u_y^2 + 1 = 0$ nima nobene rešitve

Nauk: PDE imajo običajno zelo veliko rešitev (ker v ravnini rešitvah nastopajo še neznane funkcije). Poleg PDE imamo običajno še nekaj dodatni pogoji, ki nam pomagajo omejiti število rešitev na 1.

Primer: $y u_x - x u_y = 0$

ima splošno rešitev $u(x,y) = f(x^2 + y^2)$,
kjer je f poljubna funkcija

Če hočemo določiti f , rabamo še kak dodatni pogoj

• Za dodatni pogoj izenimo

$$u(x, 0) = x^4$$

Kako iz tega določimo funkcijo f ?

$$u(x, y) = f(x^2 + y^2)$$

Vstavimo $y=0$ na obeh straneh

$$u(x, 0) = f(x^2)$$

" $\leftarrow$ po predpostavki
 x^4

Torej je $f(x^2) = x^4$ za vsak x

Če vstavimo $t = x^2$, potem dobimo,

da je $f(t) = t^2$ za vsak $t \geq 0$

Odtod sledi, da je

$$u(x, y) = f(\underbrace{x^2 + y^2}_t) = \underbrace{(x^2 + y^2)^2}_{t^2}$$

Nauk: Če želiš ^{eno} samo rešitev, rabiš ^{več}
poleg PDE še dodatne pogoje

•) Elementarne metode reševanja

Odkod je prista konstanta pri NDE

$$u'(x) = f(x)$$

(preprosta NDE 1. reda)

$$\Rightarrow u(x) = \int f(x) dx + C$$

↑
integracijska konstanta

Podobno dobimo neznano funkcijo
pri PDE

$$u_x(x, y) = f(x, y)$$

(preprosta PDE 1. reda
v dveh spr.)

Delamo se, kot da je y konstanta (=parameter)
in poiščemo zgodbo od zgoraj. Dobimo

$$u(x, y) = \int f(x, y) dx + C(y)$$

↑
to je konstanta samo
glede na x

Pri treh spr.

$$u_x(x, y, z) = f(x, y, z)$$

$$\Rightarrow u(x, y, z) = \int f(x, y, z) dx + \underbrace{C(y, z)}$$

konstanta glede na x
to je neznana funkcija
 y in z

Primer $u_{xy} = 0$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$

$(u_x)_y = 0$ Integrirano po y
 konstanta glede na y
 (= nemana funkcija x)
 $u_x = C(x)$

Integrirano še po x in dobimo

$u = \underbrace{\int C(x) dx}_{v(x)} + \underbrace{D(y)}_{w(y)}$ ← konstanta glede na x (= nemana funkcija y)

Torej je splošna rešitev PDE $u_{xy} = 0$

enaka $u(x, y) = v(x) + w(y)$,

kjer sta v in w neznani funkciji

*) Homogena linearna PDE 1. reda

dve spr. $a(x, y) u_x + b(x, y) u_y = 0$

treh $a(x, y, z) u_x + b(x, y, z) u_y + c(x, y, z) u_z = 0$

~~več~~ n $a_1(x_1, \dots, x_n) u_{x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) u_{x_n} = 0$

Kaj je geometrijski pomen take PDE? levo stran lahko zapisemo kot skalarni produkt vektorjev

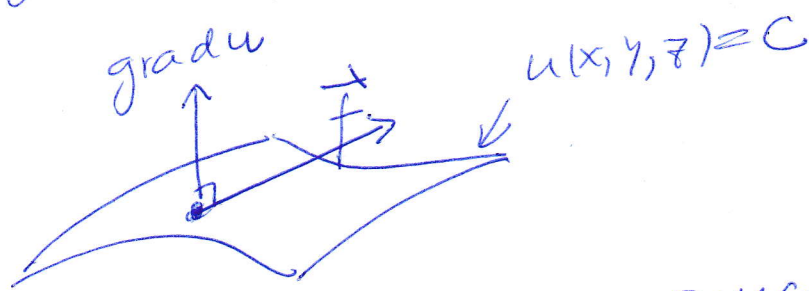
$$\vec{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

$$(\text{grad} u)(x_1, \dots, x_n) = (u_{x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, u_{x_n}(x_1, \dots, x_n))$$

$$\langle \vec{f}, \text{grad} u \rangle = f_1 u_{x_1} + \dots + f_n u_{x_n} \stackrel{\text{po PDE}}{=} 0$$

Gradient istane funkcije je pravokoten na dano vektorsko polje

Gradient ima konkreten geometrijski pomen



je pravokoten na nivojsko polje (v dani točki)

Ker je $\text{grad} u \perp \vec{f}$, je vektorsko polje $\vec{f}$ tangentno na nivojske ravnane funkcije

Geometrijski pomen rešitve enačbe

$$f_1 u_{x_1} + \dots + f_n u_{x_n} = 0$$

n je taka funkcija, katere nivojnice so tangente na dano vektorsko polje $\vec{F} = (f_1, \dots, f_n)$

1) Reševanje homogene PDE 1. reda

Pri reševanju enačbe

$$f_1 u_{x_1} + \dots + f_n u_{x_n} = 0 \quad (*)$$

si pomagamo s sistemom NDE

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

Na kratko

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n \end{aligned}$$

Na dolgo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned} \quad (**)$$

Temu se reče karakteristični sistem od (*).

Pravno, da je funkcija $u(x_1, \dots, x_n)$
prvi integral sistema $(*)$, če
 je konstantna ~~vs~~ vzdolž vsake
 rešitve tega sistema.

Na dolgo: če $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ rešitev

sistema
$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

potem obstaja konstanta C , da
 velja $u(x_1(t), \dots, x_n(t)) = C$ za vsak t

Z iskanjem prvih integralov
 sistema se lahko ukvarjati kasneje

Primer $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ Poišči prvi integral

Prvo enačbo pomnožimo z x , drugo z y

in seštejemo, dobimo $\underbrace{xx' + yy'}_{\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}(x^2 + y^2))} = x \cdot y + y \cdot (-x) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ konstanten. ~~konstanten~~ vzdolž vsake rešitve sistema

točje je $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ prvi integral sistema $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$.

Ni pa to edini prvi integral.

Za vsako funkcijo w je tudi $w(\frac{1}{2}(x^2 + y^2))$ prvi integral sistema

Tudi ta funkcija je konstantna vzdolž vsake rešitve

Kakšna je zveza med mnogimi linearnimi PDE 1. reda

$$f_1 u_{x_1} + \dots + f_n u_{x_n} \quad (*)$$

in pripadajočim karakteristiknim sistemom

$$\dot{x}_1 = f_1$$

!

$$\dot{x}_n = f_n \quad ?$$

(**)

Glavni Arel: Funkcija $u(x_1, \dots, x_n)$ je rešitev PDE (*) natanko tedaj ko je $u(x_1, \dots, x_n)$ prvi integral sistema (**)

Dokaz: Recimo, da je funkcija u rešitev enačbe (*).

Vzemimo poljubno rešitev $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ sistema (**). Radi bi dokazali, da obstaja taka konstanta C , da velja $u(x_1(t), \dots, x_n(t)) = C$

Velja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(x_1(t), \dots, x_n(t)) &= \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \\ &= u_{x_1} \cdot x_1' + \dots + u_{x_n} \cdot x_n' \\ &= u_{x_1} \cdot f_1 + \dots + u_{x_n} \cdot f_n \\ &\stackrel{(*)}{=} 0 \end{aligned}$$

Sledi, da je $u(x_1(t), \dots, x_n(t))$ konstantna

Dokažimo se obratno trditev.

Recimo, da je funkcija $u(x_1, \dots, x_n)$

prvi integral kar. sistema (*)

Vzemo pogojno točko $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

Po eksistenčnem izreku za sisteme NDE

Obstaja taka rešitev $(x_1(t), \dots, x_n(t))$

od (*), ki zadošča $(x_1(0), \dots, x_n(0)) = (a_1, \dots, a_n)$

Ker je u prvi integral je funkcija $u(x_1(t), \dots, x_n(t))$ konstantna

Sledi $0 = \frac{d}{dt} u(x_1(t), \dots, x_n(t))$ za vsa t

Demo posredno odvajamo in dobimo

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \underbrace{\dot{x}_1(t)}_{f_1(x_1(t), \dots, x_n(t))} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \underbrace{\dot{x}_n(t)}_{f_n(x_1(t), \dots, x_n(t))}$$

Vstavimo $t=0$ in dobimo

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) f_1(a_1, \dots, a_n) + \dots +$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \cdot f_n(a_1, \dots, a_n)$$

Ker to velja za vsako točko $(a_1, \dots, a_n)$, je u rešitev (*)

•) Kako poiščemo prve integrale kar. sistema

Radi bi poiskali vse prve integrale sistema

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

$$\vdots$$
$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Opozorilo, da funkcije $f_1, \dots, f_n$ ne vsebujejo spremenljivke t eksplicitno. (Torej je to avtonomen sistem).

To opazanje nam pomaga, da zmanjšamo velikost sistema za 1.

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$
$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = f_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

} te enačbe delno z zadnjo enačbo in upoštevamo

$$\frac{\frac{dx_i}{dt}}{\frac{dx_n}{dt}} = \frac{dx_i}{dx_n}$$

Dobro

$$\frac{dx_1}{dx_n} = f_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) / f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

$$\vdots$$
$$\frac{dx_{n-1}}{dx_n} = f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) / f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

To je sistem velikosti $n-1$, ki pa ni več avtonomen (ker x_n nastopa na desni eksplicitno).

Splošna rešitev sistema velikosti $n-1$ vsebuje še $n-1$ mevnih konstant

Splošna rešitev sistema (***), torej

oblike
$$x_1 = g_1(x_n, c_1, \dots, c_{n-1})$$

$$\vdots$$
$$x_{n-1} = g_{n-1}(x_n, c_1, \dots, c_{n-1})$$

Iz kar se, da so izpolnjene predpostavke

izreka o implicitni funkciji, torej

(lahko $c_1, \dots, c_{n-1}$ izrazimo z $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$)

- Obstajajo brej take funkcije $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$
da je $C_1 = \psi_1(x_1, \dots, x_n)$
 $\vdots$
 $C_{n-1} = \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$

vzdolž vsake resitve.

Funkcije $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ so prvi integrali
kar. sistema. Niso pa ~~to~~ vsi
prvi integrali kar. sistema.

Če w poljubna funkcija $n-1$ spr.,
potem je tudi $w(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$
prvi integral kar. sistema.

Pokažati se da, da je vsak prvi
integral kar. sistema take oblike

Odtod sledi, da so $w(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$,
kjer je w polj. funkcija, vse resitve
homogene linearne PDE 1. reda (*)

$$f_1 u_{x_1} + \dots + f_n u_{x_n} = 0$$

Primer: $y u_x - x u_y = 0$ (*)

Poišči splošno rešitev

1. korak Zapišemo kar. sistem te enačbe

$$\dot{x} = y \quad (**)$$

$$\dot{y} = -x$$

2. korak Eliminiramo ~~mi~~ t tako, da delimo obe enačbi

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{y}{-x} \quad (***)$$

3. korak Rešimo sistem iz 2. korak

$$-x dx = y dy$$

$$-\int x dx = \int y dy$$

$$-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C$$

4. korak Odtod sledi $\frac{x^2 + y^2}{2} = -2C$

$\varphi(x, y)$ prvi integral od (**)

Vsak drug prvi integral od (*) je oblike $w(\varphi(x, y))$, kjer je w polj. funkc.

Zaključek: Splošna rešitev (*) je $w(x^2 + y^2)$, kjer je w poljubna funkcija

Podoben primer

$$xu_x + yu_y = 0$$

Poišči splošno rešitev.

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases} \text{ kar. siste}$$

Delno enačbi

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln y + \ln C$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = C$$

$\frac{x}{y}$
pri integral

Splošna rešitev PDE je torej
 $w\left(\frac{x}{y}\right)$, ker je w poljubna funkcija