

PDE 2. predavanje

Pomurmo od zadnjih: Reševali smo homogeno linearno PDE 1. reda.

V dveh spr. $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$

V treh spr. $a(x,y,z)u_x + b(x,y,z)u_y + c(x,y,z)u_z = 0$

Najprej smo enačbi priredili kar. sistem

$$x' = a(x,y)$$

$$y' = b(x,y)$$

$$x' = a(x,y,z)$$

$$y' = b(x,y,z)$$

$$z' = c(x,y,z)$$

Potem smo iskali prve integrale kar. sistema.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a(x,y)}{b(x,y)}$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{a(x,y,z)}{c(x,y,z)}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{b(x,y,z)}{c(x,y,z)}$$

Poiskamo splošno rešitev
konstantno izrazimo x, y
 $C = \varphi(x,y) \leftarrow$ prvi int.

Poiskamo splošno rešitev
in izrazimo konstante

$$C = \varphi(x,y,z) \leftarrow \text{prva int.}$$

$$D = \psi(x,y,z)$$

Vsak drugi prvi integral
je funkcija tega

Splošna rešitev je
 $u(x,y,z) = w(\varphi(x,y,z), \psi(x,y,z))$

$$u(x,y) = w(\varphi(x,y))$$

↑
poč. funkcija prvi integral

↑ ↑ ↑
poč. funkcija prva integral

Ogledajmo si kak primer s tremi spr.

Primer : $xu_x + yu_y + zu_z = 0$

Poiščimo splošno rešitev

Kar. sistem je $\dot{x} = x, \dot{y} = y, \dot{z} = z$

Če prvi dve enačbi delimo z zadnjo, dobimo

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x}{z} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{y}{z}$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$
$$\ln x = \ln z + \ln C \quad \ln y = \ln z + D$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$
$$x = Cz \quad y = Dz$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$
$$\frac{x}{z} = C \quad \frac{y}{z} = D$$

$$\parallel \quad \parallel$$
$$\varphi(x, y, z) \quad \psi(x, y, z)$$

Splošna rešitev je poljubna funkcija
prvih integralov $\varphi(x, y, z)$ in $\psi(x, y, z)$

$$u(x, y, z) = w\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

Še en primer: $y^2 u_x + x^2 u_y + xy u_z = 0$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = xy$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{y^2}{xy} = \frac{y}{x} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{x^2}{xy} = \frac{x}{y}$$

↓

$$2x dx = 2y dy$$

$$x^2 = y^2 + C$$

$$\underbrace{x^2 - y^2 = C}_{\psi(x, y, z)}$$

$$\psi(x, y, z)$$

↓

$$2y dy = 2x dx$$

$$y^2 = x^2 + D$$

$$y^2 - x^2 = D$$

$$\underbrace{y^2 - x^2 = D}_{\psi(x, y, z)}$$

oplošna rešitev je potem

$$u(x, y, z) = w(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$$

↑
poč. funkcija ↑
pova integrala

zakaj smo naredili primere s
tremi spremenljivkami? Ker se
kvazilinearna enačba v dveh spr.

prevede na homogeno linearno v treh spr.

•) Krazilnearna PDE 1. reda

V dveh spremenljivkah se to glasi

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u) \quad (*)$$

Ta enačba ni (nigot) linearna, ker
neznana funkcija nastopa v koef.

Linearna je v u_x in u_y , ni pa
linearna v u

Enačbo (*) rešujemo z nastavkom

$$v(x, y, u(x, y)) = 0$$

Kjer je v neznana funkcija treh spr.

Nastavek parcialno odvajamo po x in y

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} v(x, y, u(x, y)) = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ = v_x + v_u \cdot u_x \Rightarrow \left(u_x = \frac{-v_x}{v_u} \right)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} v(x, y, u(x, y)) = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\ = v_y + v_u \cdot u_y \Rightarrow \left(u_y = \frac{-v_y}{v_u} \right)$$

Formuli $u_x = -\frac{v_x}{v_u}$ in $u_y = -\frac{v_y}{v_u}$

vstavim v enačbo (*) in dobimo

$$a \cdot \left(-\frac{v_x}{v_u}\right) + b \cdot \left(-\frac{v_y}{v_u}\right) = c$$

Pomnožimo z v_u in ~~na~~ damo

na isto stran. Dobimo

$$a v_x + b v_y + c v_u = 0 \quad (**)$$

To je homogena linearna PDE 1. reda
in sicer v treh spremenljivkah.

Enačbo (**) rešujemo na običajni način

$$v(x, y, u) = w(\underbrace{\varphi(x, y, u)}_{\substack{\uparrow \\ \text{to je malo} \\ \text{poly. funkc.}}}, \underbrace{\psi(x, y, u)}_{\substack{\uparrow \\ \text{prva int. kar. sistema}}})$$

Iz $w(\varphi, \psi) = 0$ izramo u (če se da)
in dobimo rešitev enačbe (*)

Primer: $x^2 u_x + y^2 u_y = (x+y)u$

To je linearna PDE 1. reda, ki ni homogena.
Reševali jo bomo kot kvazilinearno enačbo.

Kar. sistem je:

$$x' = x^2$$

$$y' = y^2$$

$$u' = (x+y)u$$

Delimo prvo in drugo enačbo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{y^2}$$

Ločno spr. $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$

Integriramo $-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + C$

Izramo $C = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$

to je prvi integral

Razlika prvih dveh enačb je

$$x' - y' = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

TO delimo s tretjo enačbo

Dobro

$$\frac{\frac{x-y}{u}}{\frac{x-y}{u}} = \frac{(x-y)/(x-y)}{(x-y)/u}$$

$$\parallel \parallel$$

$$\frac{d(x-y)}{du} = \frac{x-y}{u}$$

Odtod sledi

$$\frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{du}{u}$$

integriramo

$$\ln(x-y) = \ln u + \ln D$$

$$x-y = Du$$

$$\frac{x-y}{u} = D$$

to je prvi integral

Odtod sledi

$$v(x, y, u) = w\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \frac{x-y}{u}\right)$$

Iščemo funkcijo u dobro iz enačbe

$$v(x, y, u) = 0$$

$$w\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \frac{x-y}{u}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{u} = \tilde{w}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow u = \frac{x-y}{\tilde{w}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)}$$

To je iskana splošna
rešitev

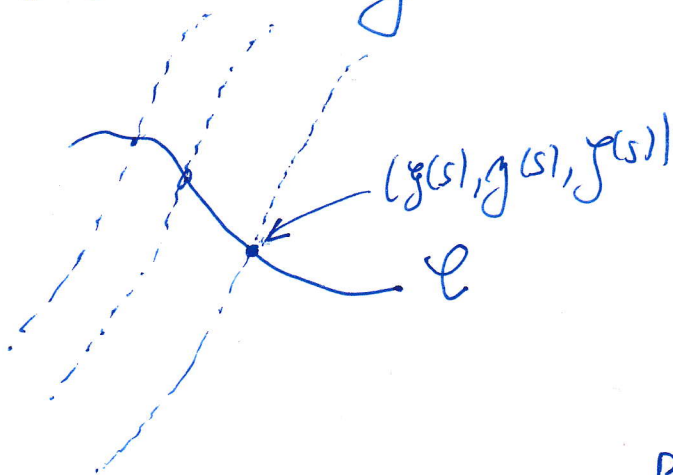
•) Začetna naloga za kvazilinearno PDE

V splošni rešitvi kvazilinearne PDE nastopajo še neznane funkcije, torej namo zelo veliko rešitev.

Če bi radi iz vseh teh rešitev izbrali eno, moramo dodati še kak pogoj. Začetni pogoj: iščemo rešitev, ki gre skozi dano krivuljo $\mathcal{C}$

Krivulja $\mathcal{C}$ je lahko podana implicitno ali parametrično. Imamo dve metodi:

Ogledno si metodo za parametrično podano krivuljo. Recimo, da je $x = \gamma(s)$, $y = \eta(s)$, $z = \zeta(s)$ parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$



Skoti vsako točko na krivulji $\mathcal{C}$ potegnemo karakteristiko (= rešitev kar. sistema)

Vse te karakteristike tvorijo plošev. Ta plošev je iskana rešitev

Karakteristika, ki gre dozi poča
($f(s), g(s), p(s)$) na krivulji
je rešitev kar. sistema

$$\dot{x} = a(x, y, u)$$

$$\dot{y} = b(x, y, u)$$

$$\dot{u} = c(x, y, u)$$

Pri začnem pogoji $x(0) = f(s)$,

$y(0) = g(s)$ in $u(0) = p(s)$

Ta rešitev je potem odvisna tako od t
kot od s , se pravi, da je oblike

$$x = x(s, t), y = y(s, t) \text{ in } u = u(s, t)$$

Iz teh enačb eliminiramo s in t (če se da
ni dobro neko zvezo med x, y in u).

Iz te zveze potem izrazimo u (če se da).

Nacrt:

- najprej si ogledno primer
- potem ustretno metodo

Primer: Poišči tako rešitev enačbe

$$(x^2+1)u_x + \frac{2xy}{x^2+1}u_y = 2xu$$

ki zadošča začetnemu pogoju

$$u(0, y) = \ln y.$$

Najprej začetno krivuljo parametriziramo
 $x=0, y=s, u=\ln s$

Kar. sistem enačbe se glasi

$$x' = x^2 + 1$$

$$x(0) = 0$$

$$y' = \frac{2xy}{x^2+1}$$

$$y(0) = s$$

$$u' = 2xu$$

$$u(0) = \ln s$$

} začetni
pogoj
pri $t=0$

Najprej rešimo prvo enačbo

$$\text{Iz } \frac{dx}{dt} = x^2 + 1 \text{ sledi } \frac{dx}{x^2+1} = dt$$

$$\text{Integriramo: } \int \frac{dx}{x^2+1} = \int dt$$

$$\text{" } \arctg x \text{ " } t + C$$

Sledi $x = \text{" } \arctg \text{" } (t + C)$. Uporabimo še $x(0)=0$

Odtod sledi, da je $C=0$. Torej je $x = \text{" } \arctg \text{" } t$

Druga enačba je

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2xy}{x^2+1} \quad \left. \vphantom{\frac{dy}{dt}} \right\} \cdot \frac{dt}{t}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x dt}{x^2+1}$$

$$\stackrel{x=\tan t}{=} \frac{2 \tan t dt}{(\tan t)^2+1} = \frac{2 \frac{\sin t}{\cos t} dt}{\frac{(\sin t)^2}{(\cos t)^2} + 1} \quad \text{"} \frac{(\cos t)^2}{(\cos t)^2}$$

$$= \frac{2 \frac{\sin t}{\cos t} dt}{\frac{1}{(\cos t)^2}} = 2 \sin t \cos t dt$$

$$= \sin 2t dt$$

Obe strani integriramo in dobimo

$$\ln y = -\frac{1}{2} \cos 2t + D$$

Konstanto D določimo iz pogoja $y(0)=5$

$$\ln 5 = -\frac{1}{2} + D$$

Enačbi odštejemo in dobimo

$$\ln y - \ln 5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t$$

$$\ln \frac{y}{5} \quad \frac{1}{2} (1 - \cos 2t)$$

$$\Rightarrow y = 5 e^{\frac{1}{2} (1 - \cos 2t)}$$

Tretja enačba je

$$\dot{u} = 2 \times u$$

$$\frac{du}{dt}$$

odtod sledi

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= 2 \times dt \\ &= 2 + g t \, dt = 2 \frac{\sin t}{\cos t} dt = 2 \frac{d(\cos t)}{\cos t} \end{aligned}$$

Integrirano

$$\ln u = -2 \ln \cos t + \ln E$$

Antilogaritmira in dobimo

$$u = \frac{E}{(\cos t)^2}$$

Upoštevamo še začetni pogoj za u ,
se pravi $u(0) = \ln s$

$$\ln s = \frac{E}{(\cos 0)^2} = E$$

$$\text{Torej je } u = \frac{\ln s}{(\cos t)^2}$$

Dobili smo x, y, u izraze in s, t

$$x = \operatorname{tg} t$$

$$y = se^{\frac{1}{2}(1-\cos 2t)}$$

$$R = \frac{\ln s}{(\cos t)^2}$$

To je iskana rešitev v parametrični obliki

Iz druge enačbe dobimo

$$s = y e^{-\frac{1}{2}(1-\cos 2t)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1-\cos 2t) &= \frac{1}{2}(1 - ((\cos t)^2 - (\sin t)^2)) \\ &= \frac{1}{2}(1 - (\cos t)^2 + (\sin t)^2) = (\sin t)^2 \\ &= \frac{(\sin t)^2}{(\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \frac{(\operatorname{tg} t)^2}{(\operatorname{tg} t)^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Torej je $s = y e^{-\frac{x^2}{x^2+1}}$, $t = \operatorname{arctg} x$
Ta s in t vstavimo v $u = \frac{\ln s}{(\cos t)^2}$

$$u = \frac{\ln s}{(\cos t)^2} = \ln s \cdot \left(\frac{(\sin t)^2 + (\cos t)^2}{(\cos t)^2} \right)$$

$$= \ln s \cdot \left(\underbrace{(\underbrace{\sin t}_x)^2 + 1}_{\parallel} \right)$$

$$= \ln s \cdot (x^2 + 1)$$

$$= \left(\ln y - \frac{x^2}{x^2 + 1} \right) \cdot (x^2 + 1)$$

$$= \underline{\underline{(x^2 + 1) \ln y - x^2}}$$

To je iskana resitev enačbe

$$(x^2 + 1) u_x + \frac{xy}{x^2 + 1} u_y = 2xu$$

pri začetnem pogoju $u(0, y) = \ln y$

· Utemeljitev metode:

Trditev: Vsaka rešitev kratičlinearne PDE
je sestavljena iz karakteristik.

Op. To pomeni, da če ima rešitev skupno
točko s karakteristiko, potem vsebuje also
karakteristiko

Dokaz: Naj bo $u = u(x, y)$ rešitev enačbe

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

in naj bo $(x(t), y(t), u(t))$ rešitev kar. sistema

$$\begin{aligned}x' &= a(x, y, u) \\ y' &= b(x, y, u) \\ u' &= c(x, y, u)\end{aligned}$$

Ogledamo si funkcijo

$$w(t) = u(t) - v(x(t), y(t))$$

če ima karakteristika kakšno skupno točko

z rešitvijo, potem obstaja tak to,

da je $v(x(t_0), y(t_0)) = u(t_0)$. Odtod sledi,

da je $w(t_0) = 0$

• Izračunajmo odvod funkcije w

$$\dot{w} = \frac{d}{dt} (u(t) - v(x(t), y(t)))$$

$$= \dot{u} - v_x \cdot \dot{x} - v_y \cdot \dot{y}$$

$$= c - v_x \cdot a - v_y \cdot b = ?$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a \\ \dot{y} &= b \\ \dot{u} &= c \end{aligned}$$

Ideja upoštevamo $av_x + bv_y = c$ $w(t) = c$
 $\Rightarrow \dot{w} = 0 \Rightarrow w = \text{const} \Rightarrow w = 0$

Ta argument najdemo v Zaključku in v
 Kritični (Nav. dif. enačbe in var. račun)

$$? = c(x(t), y(t), u(t))$$

$$- v_x(x(t), y(t)) \cdot a(x(t), y(t), u(t))$$

$$- v_y(x(t), y(t)) \cdot b(x(t), y(t), u(t)) = ??$$

Če bi hoteli, da je to nič, bi morali
 imeti namesto $u(t)$ kar $v(x(t), y(t))$

Ampak preko $u(t) = v(x(t), y(t))$ se

dokazuje, da je ta dokaz problematičen

Oglejmo si še alternativni dokaz.

Izrazimo

$$u(t) = w(t) + v(x(t), y(t))$$

in jo vstavimo v ?? Dobimo

$$\begin{aligned} \dot{w} &= c(x(t), y(t), w(t) + v(x(t), y(t))) \\ &\quad - v_x(x(t), y(t)) \cdot a(x(t), y(t), w(t) + v(x(t), y(t))) \\ &\quad - v_y(\quad) \cdot b(\quad) \end{aligned}$$

Na kratko se to glasi

$$\dot{w} = c(x, y, w+v) - v_x a(x, y, w+v) - v_y b(x, y, w+v)$$

To je NDE 1. reda za $w(t)$, imamo še
začetni pogoj.

Eno resitev te enačbe (lahko uganemo,
namreč $w \equiv 0$)

Namreč iz kvadrilneame enačbe sledi

$$0 = c(x, y, 0+v) - v_x a(x, y, 0+v) - v_y b(x, y, 0+v)$$

Potem upoštevamo še izrek o enoličnosti
resitve začelnega problema za NDE
in dobimo, da je $w \equiv 0$ edina resitev.

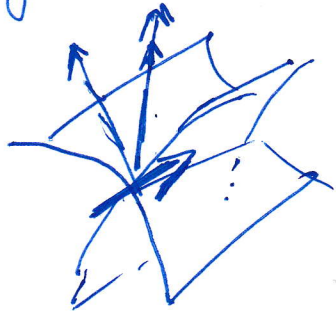
Torej je res $u(t) = v(x(t), y(t))$ za vsa t

Opomba: Poljubni dve rešitvi kvadratne enačbe se sekata vzdolž neke karakteristike.

Dokaz: Če je $u = v(x, y)$ rešitev
$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

potem je normala na rešitev, se pravi
 $(v_x, v_y, -1)$
pravokotna na polje $(a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u))$

Če imamo dve rešitvi
 $u = v_1(x, y)$ in $u = v_2(x, y)$
potem sta njuni normali pravokotni na
polje (a, b, c)



Vektorski produkt obeh
normal kaže tako v
smerni presečne krivulje
kot v smeri polja (a, b, c)

Tangenta na presečno krivuljo torej
kaže v smeri (a, b, c) . TO pomeni,
da je presečna krivulja karakteristika.

KANONICNE FORME ZA PDE

2. reda

Imamo semilinearno enačbo 2. reda

$$a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \quad (*)$$

To enačbo bi radi poenostanili

To bomo naredili s spremembo uvedbo nove spremenljivke

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

Potem moramo seveda uvesti tudi

novo funkcijo $v(\xi, \eta)$, kjer velja

$$u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y))$$

Odtod sledi

$$u_x = v_\xi \cdot \xi_x + v_\eta \cdot \eta_x$$

$$u_y = v_\xi \cdot \xi_y + v_\eta \cdot \eta_y$$

• Izrazimo še druge odvode

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_g \cdot f_x + v_y \cdot g_x)_x$$

$$= \underline{v_{gx}} \cdot f_x + v_g \cdot f_{xx} + \underline{v_{gx}} \cdot g_x + v_y \cdot g_{xx}$$

Če v formulo za u_x vstavimo $u = v_g$,
dobimo

$$v_{gx} = v_{gg} \cdot f_x + v_{gy} \cdot g_x$$

Podobno dobimo

$$v_{yx} = v_{yg} \cdot f_x + v_{yy} \cdot g_x$$

Odtod sledi

$$\begin{aligned} u_{xx} &= v_{gg} \cdot (f_x)^2 + v_{gy} \cdot g_x \cdot f_x + v_g \cdot f_{xx} \\ &\quad + v_{yg} \cdot f_x \cdot g_x + v_{yy} \cdot (g_x)^2 + v_y \cdot g_{xx} \\ &= v_{gg} (f_x)^2 + 2v_{gy} f_x g_x + v_{yy} (g_x)^2 \\ &\quad + v_g \cdot f_{xx} + v_y \cdot g_{xx} \end{aligned}$$

Podobno izračunamo tudi u_{xy} in u_{yy}

Te izraze potem vstavimo v (*)

Dobro

$$u_{xy} = v_{yy} f_x f_y + v_{yz} (f_x f_z + f_z f_x) + v_{yz} f_x f_z + v_{yz} f_x f_z + v_{yz} f_x f_z$$

$$u_{yy} = v_{yy} (f_y)^2 + 2v_{yz} f_y f_z + v_{zz} (f_z)^2 + v_{yz} f_{yz} + v_{yz} f_{yz}$$

Ko to vstavimo v prvo enačbo

in uredimo dobimo

$$(a f_x^2 + 2b f_x f_y + c f_y^2) v_{yy} + (a f_x f_z + b (f_x f_z + f_z f_x) + c f_z^2) 2v_{yz} + (a f_x^2 + 2b f_x f_z + c f_z^2) v_{zz}$$

$$= f(x, y, z, u, v) - v_y (a f_{xx} + 2b f_{xy} + c f_{yy}) - v_z (a f_{xz} + 2b f_{yz} + c f_{zz})$$

$$v f_x + v_z f_z$$

$$v f_y + v_z f_z$$

Na kratko se to glasi

$$\tilde{a} v_{yy} + 2\tilde{b} v_{yz} + \tilde{c} v_{zz} = \tilde{f}$$

Op

u

a

m

c

lahko

spremenimo

na

z

na

z

na

z

na

z

na