

• Povzetek od zadnjic

Če je semilinearna PDE 2. reda

$$a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

uvvedemo novi spremenljivku

$$\xi = \xi(x, y) \text{ in } \eta = \eta(x, y)$$

in novo funkcijo $v(\xi, \eta) = v(\xi(x, y), \eta(x, y)) = u(x, y)$

Potem dobimo novo semilinearno

PDE 2. reda in sicer

$$\tilde{a} v_{\xi\xi} + 2\tilde{b} v_{\xi\eta} + \tilde{c} v_{\eta\eta} = \tilde{f}(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

pri čemer je

$$\tilde{a} = a \xi_x^2 + 2b \xi_x \xi_y + c \xi_y^2$$

$$\tilde{b} = a \xi_x \eta_x + b(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c \xi_y \eta_y$$

$$\tilde{c} = a \eta_x^2 + 2b \eta_x \eta_y + c \eta_y^2$$

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), u(\xi, \eta), v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x, v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y) \\ & - (a \xi_{xx} + 2b \xi_{xy} + c \xi_{yy}) v_\xi \\ & - (a \eta_{xx} + 2b \eta_{xy} + c \eta_{yy}) v_\eta \end{aligned}$$

Kako si zapomnimo formule za $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$?

Opoznamo, da velja

$$\begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{bmatrix} \quad (*)$$

$\uparrow$ novi koef.
 $\uparrow$ Jacobi
 $\uparrow$ prvotni koef.
 $\uparrow$ transponirane od Jacobija

$$\begin{bmatrix} a f_x + b f_y & b f_x + c f_y \\ a g_x + b g_y & b g_x + c g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a f_x^2 + b f_y f_x + b f_x f_y + c f_y^2 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$\tilde{a}$

Če v formuli (*) uporabimo determinanto na obeh straneh, dobimo

$$\tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}^2 = (ac - b^2) \underbrace{(f_x g_y - f_y g_x)^2}_{\neq 0} \quad (**)$$

Ker je izraz $(f_x g_y - f_y g_x)^2$ strogo pozitiven, imata izraza $\tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}^2$ in $ac - b^2$ enak predznak (v vsaki točki)

- To lahko izkoristimo za klasifikacijo semihomogenih PDE 2. reda.

- (1.) Če je $ac - b^2 > 0$ v točki (x, y) ,
potem pravimo, da je enačba $axx + 2bxy + cyy = f$
eliptična v (x, y)
- (2.) Če je $ac - b^2 = 0$ v točki (x, y) , potem
pravimo, da je enačba parabolična v (x, y)
- (3.) Če je $ac - b^2 < 0$ v točki (x, y) , potem
pravimo, da je enačba hiperbolična v (x, y)

Opomba: Ista enačba je lahko
povehod eliptična, povehod parabolična
in povehod hiperbolična

Primer: Enačba $uxx + x uyy$

$$a = 1, b = 0, c = x$$

$$\Rightarrow ac - b^2 = x$$

Kjer je $x > 0$ je enačba eliptična
 $x = 0$ parabolična
 $x < 0$ hiperbolična

Opomba; če so koeficienti a, b, c konstante
potem lahko govorimo o eliptični / parab. / hip.
enačbi, ker predznak od $ac - b^2$ ni odvisen
od x in y .

Kaj želimo doseči?

Radi enačbo $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f$
prevedli na čimpreprostejšo obliko,
(z izbiro primernih novih spremenljivk)
ki ji pravimo kanonična oblika

- (1.) V hiperboličnem primeru je kanonična ~~oblika~~
oblika $v_{\xi\xi} = \tilde{f}(\xi, \eta, v, v_{\xi}, v_{\eta})$
- (2.) V eliptičnem primeru je kanonična oblika
 $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \tilde{f}(\xi, \eta, v, v_{\xi}, v_{\eta})$
- (3.) V paraboličnem primeru je kanonična oblika
 $v_{\eta\eta} = \tilde{f}(\xi, \eta, v, v_{\xi}, v_{\eta})$

- Opomba: V hiperboličnem primeru namo
še eno kanonično obliko

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = \tilde{f}(\xi, \eta, v, v_{\xi}, v_{\eta})$$

V naslednjem poglavju se bomo ukvarjali
z reševanjem (nekaterih) kanoničnih PDE

Primeri:

- 1) Valovna enačba $(u_{xx} = u_{tt})$ je poseben
primer druge kanonične oblike za hiperb.pr.
- 1) Laplaceova enačba $(u_{xx} + u_{yy} = 0)$ je
poseben primer kanonične oblike za
eliptične PDE
-) Toplota (= difuzijska) enačba $(u_{xx} = u_t)$
je poseben primer kanonične oblike za
parabolične PDE

Kanoničnih oblik v vsej splošnosti
ne bomo znali rešiti.

•) Hiperbolische PDE

Enačbo $au_{xx} + 2b u_{xy} + cu_{yy} = f$

bi radi prevedli na obliko

$$\tilde{a} v_{\xi\xi} + 2\tilde{b} v_{\xi\eta} + \tilde{c} v_{\eta\eta} = \tilde{f}, \text{ kjer je } \tilde{a} = \tilde{c} = 0$$

Spomnimo se, da je

$$\tilde{a} = a \xi^2 + 2b \xi \eta + c \eta^2$$

$$\tilde{c} = a \eta^2 + 2b \eta \xi + c \xi^2$$

Enačbo $\tilde{a} = 0$ lahko zapišemo v obliki

$$a \left(\frac{\xi}{\eta} \right)^2 + 2b \frac{\xi}{\eta} + c = 0$$

Podobno, $\tilde{c} = 0$ lahko zapišemo v obliki

$$a \left(\frac{\eta}{\xi} \right)^2 + 2b \frac{\eta}{\xi} + c = 0$$

V obeh primerih dobimo enačbo oblike

$$a \mu^2 + 2b \mu + c = 0$$

To je kvadratna enačba za μ

• Najma' resitni sta

$$\mu_1, \mu_2 = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

Ker je enačba hiperbolična (v okolici neke točke), ji $ac - b^2 < 0$, torej je $b^2 - ac > 0$ in sta rešitni μ_1 in μ_2 realni (v okolici neke točke).

Potem rešimo še enačbi:

$$\frac{f_x}{f_y} = \cancel{\mu_1} \text{ in } \frac{g_x}{g_y} = \mu_2$$

Uredimo

$$f_x - \mu_1 f_y = 0 \text{ in } g_x - \mu_2 g_y = 0$$

To sta homogeni linearni PDE 1. reda
Znamo jih rešiti z metodo iz prejšnjega
poglavja. Rabmo samo eno rešitev vsake

Na koncu se vpelje v novi spremenljivki

$$\xi = \xi(x, y) \text{ in } \eta = \eta(x, y)$$

in dobimo enačbo želenne oblike

(se pravi tako, ker je $\tilde{a} = 0$ in $\tilde{c} = 0$)

Postopek

1. korak Reši $a\mu^2 + 2b\mu + c = 0$

2. korak Reši $\xi_x - \mu_1 \xi_y = 0$ in $\eta_x - \mu_2 \eta_y = 0$

3. korak Napravi substitucijo $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$

Primer: Enačbo $c^2 u_{xx} = u_{yy}$ (ker je c konst)

prevede na kanonično obliko).

Opomba: To je teoretično in praktično pomemben primer, ker je to valovna enačba

Najprej enačbo zapišemo v obliki

$$\underbrace{c^2}_{a(x,y)} \cdot u_{xx} + \underbrace{2 \cdot 0}_{b(x,y)} \cdot u_{xy} + \underbrace{(-1)}_{c(x,y)} u_{yy} = 0$$

Prilagodjena kvadratna enačba

$$a\mu^2 + 2b\mu + c = 0$$

je potem obliki

$$c^2\mu^2 - 1 = 0$$

Ta enačba ima dve rešitvi

$$\mu = \pm \frac{1}{c}$$

S tem je prvi korak končan.

Drugi korak od nas zahteva,
da rešimo enačbi:

$$g_x - \mu_1 g_y = 0 \quad \text{in} \quad g_x - \mu_2 g_y = 0$$

V našem primeru je to

$$g_x - \frac{1}{c} g_y = 0 \quad \text{in} \quad g_x + \frac{1}{c} g_y = 0$$

Zapišimo kar. sistema za obe enačbi

Prva

$$\dot{x} = 1$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{c}$$



$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{-\frac{1}{c}} = -c$$

$$dx = -c dy$$

$$\int dx = -\int c dy$$

$$x = -cy + \text{konst}$$

$$\underbrace{x + cy = \text{konst}}$$

prvi integral,

vzamemo ga za $y(x,y)$

Pozetek

$$y(x,y) = x + cy$$

S tem smo zaključili drugi korak.

Druga

$$\dot{x} = 1$$

$$\dot{y} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{dx}{dy} = c$$

$$dx = c dy$$

$$\int dx = \int c dy$$

$$x = cy + \text{konst}$$

$$\underbrace{x - cy = \text{konst}}$$

prvi integral

Vzamemo

$$y(x,y) = x - cy$$

Tretji korak od nas zahteva,
da v enačbo uvedemo prvi spr
 $y = y(x,y) = x + cy$ in $y = y(x,y) = x - cy$

Vemo, da dolimo enačbo

$$\tilde{a} v_{gg} + 2\tilde{b} v_{gy} + \tilde{c} v_{yy} = \tilde{f}$$

Po konstrukciji g in y velja, da je

$$\tilde{a} = 0 \quad \text{in} \quad \tilde{c} = 0$$

za $\tilde{b}$ pa velja

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= \begin{matrix} a & b & c \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ g_x & g_y & g_y \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ c^2 & 1 & 1 \\ & & 0 \end{matrix} \begin{matrix} g_x g_x & g_x g_y & g_y g_x & g_y g_y \\ & & & (-1) & c & (-c) \end{matrix} \\ &= c^2 + c^2 = 2c^2 \end{aligned}$$

$$g(x, y) = x + cy$$

$$y(x, y) = x - cy$$

za $\tilde{f}$ dobimo

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= f - (a g_{xx} + 2b g_{xy} + c g_{yy}) v_g \\ &\quad - (a y_{xx} + 2b y_{xy} + c y_{yy}) v_y \end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $f = 0$ in da so

$g_{xx}, g_{xy}, g_{yy}, y_{xx}, y_{xy}, y_{yy}$ enaki nič.

Dobimo $\tilde{f} = 0$.

Dobili smo $4c^2 v_{xy} = 0$

Pokrajšamo $4c^2$ in dobimo $v_{xy} = 0$

$\Rightarrow v_x = \text{konstanta po } y$
 $= f(x)$

$\Rightarrow v = \underbrace{\int f(x) dx}_{h(x)} + g(y)$

$\Rightarrow v = h(x) + g(y),$

kjer sta g in h poljubni funkciji

Vstavimo še formuli za x in y

$x = x + cy, \quad y = x - cy$

Dobimo rezultat prvotne enačbe

$u(x, y) = v(x(x, y), y(x, y))$

$= h(x(x, y)) + g(y(x, y))$

$= h(x + cy) + g(x - cy)$

TO je iskana rešitev

Oglejmo si še en primer z nekonstantnimi koeficienti.

Primer: Enačbo $u_{xx} = x^2 u_{yy}$ prevedi na kanonično obliko

$$1 \cdot u_{xx} + 2 \cdot \underset{\substack{b \\ h}}{0} \cdot u_{xy} + \underset{\substack{c \\ h}}{(-x^2)} u_{yy} = 0$$

Prilagodena kvadratna enačba je

$$a\mu^2 + 2b\mu + c = 0$$

se pravi

$$\mu^2 - x^2 = 0$$

Njeni rešitvi sta $\mu = \pm x$

Rešiti moramo še enačbi

$$\frac{u_x}{u_y} = \mu_1 = x \quad \text{in} \quad \frac{u_x}{u_y} = \mu_2 = -x$$

Dobro dve PDE 1. reda

$$f_x - x f_y = 0 \quad \text{in} \quad g_x + x g_y = 0$$

Pripadajoča kar. sistema sta

$$\dot{x} = 1$$

$$\dot{x} = 1$$

$$\dot{y} = -x$$

$$\dot{y} = x$$

Določimo prva integrala teh sistemov

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{-x}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{x}$$

$$+ x dx = -dy$$

$$x dx = dy$$

$$+ \int x dx = - \int dy$$

$$\int x dx = \int dy$$

$$\frac{x^2}{2} = -y + \text{const}$$

$$\frac{x^2}{2} = y + \text{const}$$

Prvi integral ji

$$g(x, y) = \frac{x^2}{2} + y$$

$$g(x, y) = \frac{x^2}{2} - y$$

Ti dve spremenljivki potem uvedemo v enačbo.

Na koncu v prvo enačbo $u_{xx} = x^2 u_{yy}$ uvedemo izračunani spremenljivki

$$\xi(x, y) = \frac{x^2}{2} + y \quad \text{in} \quad \eta(x, y) = \frac{x^2}{2} - y$$

Po konstrukciji dobimo, da je $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$

Ostane nam še izračun $\tilde{b}$ in $\tilde{f}$.

$$\tilde{b} = a \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\underset{\substack{\parallel \\ x}}{\underset{\substack{\parallel \\ x}}{f_x}}} + b (\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{f_{xx}} + \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{f_{xy}} + \underset{\substack{\parallel \\ -x^2}}{f_{yx}}) + c \underset{\substack{\parallel \\ -1}}{f_{yy}} = 2x^2$$

$$\tilde{f} = f - \frac{(a f_{xx} + 2b f_{xy} + c f_{yy})}{v_f} - \frac{(a \eta_{xx} + 2b \eta_{xy} + c \eta_{yy})}{v_g}$$

$$= -v_g - v_g$$

$$\text{Dobili smo} \quad 4x^2 v_{fg} = -v_g - v_g$$

$$\text{Izrazimo še } x^2 \text{ z } \xi \text{ in } \eta$$

Če sistemsko definiraj ξ in η , dobimo

$$\xi + \eta = x^2$$

Iščena kanonična oblika je torej

$$v_{fg} = \frac{-1}{4(\xi + \eta)} (v_g + v_g)$$

- Kako poiščemo drugo kanonično obliko za hiperbolične PDE?

Uvedemo novi spremenljivki

$$\alpha = \xi + \eta \quad \text{in} \quad \beta = \xi - \eta$$

in novo funkcijo

$$v(\xi, \eta) = w(\alpha, \beta) = w(\xi + \eta, \xi - \eta)$$

Dobimo enačbo oblike

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} = \tilde{f}(\dots)$$

- 1) Eliptične PDE

Metoda razloženja na primeni.

Primer: Prevedli enačbo

$$5u_{xx} + 6u_{xy} + 2u_{yy} + 3u_x + 4u_y + u = 0$$

na kanonično obliko

Začnemo z kvadratno enačbo

$$5\mu^2 + 6\mu + 2 = 0$$

$$\text{Rešitvi sta } \mu = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{10} = \frac{-3 \pm i}{5}$$

Če nadajujemo kot pri hiperbolični enačbi,
potem moramo rešiti dve PDE 1. reda

$$\frac{g_x}{g_y} = \mu_1 = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i \quad \text{in} \quad \frac{g_x}{g_y} = \mu_2 = -\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$g_x - \mu_1 g_y = 0$$

$$x' = 1$$

$$y' = -\mu_1$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{\mu_1}$$

$$\mu_1 dx = -dy$$

$$\mu_1 x = -y + \text{const}$$

$$\underbrace{\mu_1 x + y}_{g} = \text{const}$$

$$g = \mu_1 x + y = \left(-\frac{3}{5} + \frac{i}{5}\right)x + y$$

$$= \left(-\frac{3}{5}x + y\right) + \frac{i}{5}x$$

$$g = \mu_2 x + y = \left(-\frac{3}{5} - \frac{i}{5}\right)x + y$$

$$= -\frac{3}{5}x + y - \frac{i}{5}x$$

$$g_x - \mu_2 g_y = 0$$

$$x' = 1$$

$$y' = -\mu_2$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{\mu_2}$$

$$\mu_2 dx = -dy$$

~~$$\mu_2 y = \text{const}$$~~

$$\mu_2 x = -y + \text{const}$$

$$\underbrace{\mu_2 x + y}_g = \text{const}$$

Če ti dve spremenljivki uvedemo v prvoho in drugo, dobimo novo enačbo s kompleksnimi koef

$$V_{eg} = f(\dots) \leftarrow \text{kompleksna}$$

Boljša ideja je, da vzamemo realni in kompleksni del od g

$$x = \operatorname{Re}(g) = \frac{g + \bar{g}}{2} = 7 - \frac{3}{5}x$$

$$y = \operatorname{Im}(g) = \frac{g - \bar{g}}{2i} = \frac{1}{5}x$$

Uvedemo tudi novo funkcijo

$$u(x, y) = v(x, y) = v\left(7 - \frac{3}{5}x, \frac{1}{5}x\right)$$

Posredno odvajamo

$$\begin{aligned} u_x &= V_x \cdot x_x + V_y \cdot y_x \\ &= V_x \cdot \frac{-3}{5} + V_y \cdot \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= V_x \cdot x_y + V_y \cdot y_y \\ &= V_x \cdot 1 + V_y \cdot 0 = V_x \end{aligned}$$

Izračunajmo še druge odrede

$$\begin{aligned}u_{xx} &= (u_x)_x = \left(v_x \cdot \frac{-3}{5} + v_z \cdot \frac{1}{5} \right)_x \\&= \left(v_x \cdot \frac{-3}{5} + v_z \cdot \frac{1}{5} \right)_{\alpha} \cdot \alpha_x'' + \left(v_x \cdot \frac{-3}{5} + v_z \cdot \frac{1}{5} \right)_{\beta} \cdot \beta_x'' \\&= v_{xx} \cdot \left(\frac{-3}{5} \right)^2 + 2v_{xz} \cdot \frac{-3}{5} \cdot \frac{1}{5} + v_{zz} \left(\frac{1}{5} \right)^2 \\&= \frac{9}{25} v_{xx} - \frac{6}{25} v_{xz} + \frac{1}{25} v_{zz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{xy} &= (u_x)_y = (v_x)_y = v_{xx} \cdot \alpha_y' + v_{xz} \cdot \beta_y' \\&= v_{xx} \cdot \frac{-3}{5} + v_{xz} \cdot \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{yy} &= (u_y)_y = (v_x)_y = v_{xx} \cdot \alpha_y'' + v_{xz} \cdot \beta_y'' \\&= v_{xx}\end{aligned}$$

Dobimo ~~0~~

Dobivamo

$$\textcircled{1} = 5u_{xx} + 6u_{xy} + 2u_{yy} + 3u_x + 4u_y + 4$$

$$= 5 \left(\frac{9}{25} v_{xx} - \frac{6}{25} v_{xz} + \frac{1}{25} v_{zz} \right)$$

$$+ 6 \left(-\frac{3}{5} v_{xx} + \frac{1}{5} v_{xz} \right)$$

$$+ 2v_{zz}$$

$$+ 3 \left(-\frac{3}{5} v_x + \frac{1}{5} v_z \right)$$

$$+ 4(v_x)$$

$$+ v$$

$$= \frac{1}{5} v_{xx} + 0 \cdot v_{xz} + \frac{1}{5} v_{zz}$$

$$+ \frac{11}{5} v_x + \frac{2}{5} v_z + v$$

① Obili su kanonično oblik

$$v_{xx} + v_{zz} = \frac{-11v_x - 3v_z - 5v}{\tilde{f}(x, z, v, v_x, v_z)}$$

Opomba: To enačbo se da še
naprej poenostaviti.

Z nastavitvami

$$V = e^{kx + lz} w$$

se lahko znebimo prvih odvodov

Ta nastavek uređeno v enačbo
in izberemo k in l tako, da
bodo koeficienti poleg w in w_z
enaki nič.